ワインバーグ

場の量子論

2巻 量子場の理論形式

S. Weinberg 著
青山秀明
有末宏明 共訳

吉岡書店

ワインバーグ 場の量子論

2巻　量子場の理論形式

（原著第2刷）

S. Weinberg　著

青山秀明
有末宏明　共訳

物理学叢書
77

吉岡書店

The Quantum Theory of Fields

Volume I
Foundations

Steven Weinberg
University of Texas at Austin

Japanese translation right arranged
with Cambridge University Press, Cambridge
through Tuttle-Mori Agency, Inc., Tokyo

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

目次

(アステリスク (*) を付けた節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.)

1 巻 粒子と量子場

3 巻 非可換ゲージ理論

4 巻 場の量子論の現代的諸相

I 巻の序文

なぜ, 場の理論の本がもう一冊必要なのだろうか? 今日, 場の理論を学ぶものは数ある優れた本の中から選択ができる. しかも, それらの何冊かは最新の内容を含んでいる. もう一冊の本が有用であるとしたら, それは何か新しい内容か視点を提供するものでなければならない.

内容に関しては, この本は多くの新しい題材を含んではいるが, その最大の特徴は一般性だろう. この本を通じて可能な限り一般的な枠組みで議論を進めるように努めた. これは, 一つには, 場の量子論はそれがかつて成功をおさめた量子電磁理論から遥かに遠い場面で応用されていることもあるが, それ以上に, この一般性のおかげで, 重要な点がそれぞれの特定の理論での詳細な技術面に埋もれてしまうことが避けれると思うからだ. もちろん, 量子電磁理論とともに現代の素粒子論, 原子核理論からさまざまな例をとり, 一般的な点を例証した.

しかしながら, 私がこの本を書くに至った主要な動機は, その内容よりもむしろ, その視点にある. 私の目標は, 場の量子論がなぜ今の形をとり, なぜこの形で現実の世界をうまく記述できるのかを, 読者ができるだけ明確に理解できる形で提供することだ.

伝統的なアプローチでは, ハイゼンベルグ・パウリの最初の一般的な場の量子論の論文以来, 電磁気での経験を正当化の理由とし, 場が与えられたものとして, それを「量子化」する. つまり, 種々の単純な

場の理論に正準量子化か経路積分の規則を適用する．この伝統的なやり方のうち，幾つかは1章の歴史的導入で述べる．これは確かに早く主題に入るやり方ではあるが，深く考える読者には数多くの疑問点が残る．なぜ，正準量子化や経路積分を信じなければならないのか? なぜ，文献にある単純な場の方程式やラグランジアンを採用しなければならないのか? そもそも，なぜ場などを考えるのか? 私は経験に訴えることには満足がいかない．理論物理学の目的は，つまるところ，世界を我々が見たまま記述するのではなく，なぜ世界がこうなっているのかを幾つかの基本的原理から説明することにあるからだ．

この本の視点は，場の量子論は量子力学の (クラスター分解原理を含む) 原理と特殊相対論の原理を調和させる (弦理論のように無限個の種類の粒子を含む理論は別として) 唯一の方法だということにある．私は長年こう考えてきたが，最近になってこれはより適切な見方となった．近年になって，これまで成功を収めてきた場の理論は，量子電磁理論ですら，「有効場の理論」つまりより深いところにある理論の低エネルギーでの近似であると考えられるようになった．この深い理論は，弦理論のように場の理論とは異なる理論かも知れない．ならば，なぜ場の理論が我々の手の届くエネルギーで物理をよく記述するかというと，それはどのような相対論的な量子論も十分に低いエネルギーでは場の理論のように見えるからだ．したがって，相対論と量子論の原理から場の量子論の正当性を理解することが重要になる．また，場の理論を本当に基本的な理論と考えていたときにはくりこみ不可能性や「自明性」のようないくつかの問題には頭を悩ませたが，今ではこれらについても異なった見方をするようになった．この変化もこの本での議論に反映している．この本は，有効場の理論の時代の場の量子論の本だ．

相対論と量子論の最も直接的で確実な帰結は粒子状態の性質だ．したがって，粒子を最初に論じる．これは2章で量子論のヒルベルト空

間で非斉次ローレンツ群の表現の成分として導入する．3章では，ダイナミクスに関する基本的な質問，すなわち遥か過去に状態が自由粒子のある集まりになっていたして，それが将来どうなるかという質問に答えるための枠組みを用意する．時間推進の生成子であるハミルトニアンを知っていれば，この質問には S 行列と呼ばれる遷移振幅の集まりの摂動論的展開で答えることができる．4章ではクラスター分解原理を使って，どのようにハミルトニアンが生成・消滅演算子から構成されるかをみる．5章ではローレンツ不変性に戻り，それがこれらの生成・消滅演算子を因果律を満たす量子場にまとまることをみる．その副産物として，CPT 定理およびスピンと統計の関係をみる．この理論形式を使って6章では S 行列を計算するためのファインマン則を導く．

7章*に至って初めて，ラグランジアンと正準形式を論じる．これらを導入する理由は，物理の他の分野で有用であることではなく (それは充分満足のいく説明には決してならない)，この形式を使うと，S 行列が必要な様々な対称性を満たすように相互作用ハミルトニアンを選ぶのが簡単だからだ．特に，ラグランジアン密度がローレンツ不変ならば，ポアンカレ群の代数を満たす10個の演算子が存在し，3章でみたように，これは S 行列のローレンツ不変性の証明に必要な基本条件だ．量子電磁理論は8章でやっと現れる．9章では経路積分を導入し，それを用いて8章で大雑把な議論で導いた量子電磁理論のファインマン則を正当化する．この経路積分の導入は，最近流行りのやり方よりは遅い．これは，ラグランジアンが与えられたときファインマン則を導くには経路積分は確かに最短の方法だが，これらの計算の基礎となる量子力学的な理由は曖昧になると考えるからだ．

I 巻*は 10–14 章で一般の場の理論でのループ・ダイアグラムを含

*訳者注: 日本語訳では，原著I巻を分冊し，1-6章を1巻，7-14章を2巻とする．また，原著II巻も分冊し，15-19章を3巻，20-23章を4巻とする．

む輻射補正の計算を紹介して終る. ここでも, 配置は多少通常とは異なっている. まず, 非摂動的な方法についての章から始める. これは, それで得られる結果によって, 理論に無限大があるかどうかに関係なく, 場と質量のくりこみの必要性が理解できるからだ. 11章では量子電磁理論での有名な1ループ計算を述べる. これは, (ファインマン・パラメーター, ウィック回転, 次元正則化, パウリ・ビラスの正則化などの) 役に立つ計算の技法を説明する機会でもあり, またくりこみを明確な例で実際に行う機会にもなっている. 11章で得た結果は12章で全次数と一般の理論に拡張し, そこでは有効場の理論に適したくりこみ不可能性についての現代的な見方も述べる. 13章では多少寄り道をして, 低エネルギーまたは揃った運動量を持つ質量ゼロの複数の粒子により引き起こされる特別の問題を論じる. 外場のもとでの電子のディラック方程式は歴史的には相対論的量子力学のほとんど初めから登場したが, この本では14章で束縛状態を扱う際に初めて登場する. これは, この方程式は (ディラックが考えたような) シュレーディンガー方程式の相対論版ではなく, 真の相対論的量子論, つまり電子と光子の場の量子論の近似として見るべきだからだ. この章の終わりではラム・シフトを扱い, 今日までにいたる理論と実験の相克について述べる.

読者には, ここで扱う内容の一部, 特に3章の一部は, 原子核理論か素粒子論の教科書に入れた方が適切だと思えるかもしれない. そうかもしれないが, 私の経験ではこれらの内容は通常全く論じられていないか, 対称性と量子論の一般原理から説き起こすことなく特定のダイナミカルな模型を使って不十分に論じられているだけだ. 時間反転不変性と終状態の位相変化の関連を聞いたこともない弦の理論家たちや, なぜ共鳴がブライト・ウィグナーの公式で扱われるのか理解していない原子核理論家たちに会ったことがある. したがって, 始めの方の章では大事を取って, これらのテーマを削るよりは含めるようにした.

II 巻では, 近年の場の量子論の復活につながった, 非可換ゲージ理論, くりこみ群, 対称性の破れ, アノマリー, インスタントン等の題材を扱う.

参考文献については, 場の量子論についての古典的な論文も, 詳細に述べなかったトピックについての有用な文献も挙げるよう努めた. ここで述べた題材で誰が最初に論じたか私は知らないものもあり, 参考文献がないからといって, この本での取扱いが最初であるという意味ではない. しかし, 幾つかは実際にそうである. 何箇所か, たとえば, 対称性演算子がユニタリーか反ユニタリーである証明, 超選択則の議論, 反転の非標準的な表現にともなう粒子の縮退の解析, クラスター分解原理の使用, LSZ 形式の導出, 外場近似の導出, 更にはラム・シフトの計算まで, もとの文献や標準的な教科書での取扱いよりは改善になっていると思う.

また, 最初の章以外では問題を与えた. この問題の一部はその章で論じた技法を使う練習であるし, 他はその章の結果がより広い種類の理論に拡張されることを示している.

場の量子論を教えていて, この I, II 巻のそれぞれが大学院の 1 年分の内容に足ると感じる. この本は非相対論的量子力学と古典電磁理論に通じた学生が取り組みやすいように努めた. また, 複素解析と行列代数の基礎知識も必要であるが, 群論とトポロジーについてはそれが必要なところで説明している.

この本は, 弱・電磁・強相互作用の標準模型で今すぐにファインマン・ダイアグラムの計算を始めたい学生には向かない. また, 高水準の数学的厳密さを求める学生にも相応しくない. 実際, この本では, 一部に数学的傾向の強い読者が涙するところもあるだろう. むしろ, 物理学者と物理を学ぶ学生が, なぜ場の量子論が現在の姿になっているかを理解し, 物理が我々の現在の理解を越えてどのように発展しようともそれに備えようとするとき, この本が役に立つだろう.

* * *

この本の題材の多くは, 何年もの間, とてもここに書き切れないほど数多くの物理学者との相互作用から学んだ. その中でも特に多くを学んだ, シドニー・コールマン (Sidney Coleman) と, テキサス大学の以下の人たちに感謝する: Arno Bohm, Luis Boya, Phil Candelas, Bryce DeWitt, Cecile DeWitt-Morette, Jacques Distler, Willy Fischler, Josh Feinberg, Joaquim Gomis, Vadim Kaplunovsky, Joe Polchinski, Paul Shapiro. 歴史的な導入部については, Gerry Holton, Arthur Miller, Sam Schweber の各氏に世話になった. Alyce Wilson 氏は図を用意し, 私が LaTeX を使えるようになるまで原稿入力をし, Terry Riley 氏は数多くの書籍・文献を見つけてくれた. 数多くの学生と同僚たち, 特に Kevin Cahill 氏はこの巻の第1刷での様々な誤りを見つけてくれた. ケンブリッジ・ユニバーシティ・プレスの Maureen Storey と Alison Woollatt 両氏にはこの本の出版についての努力に, また特に編集者 Rufus Neal 氏には建設的な良い助言に感謝したい.

スティーブン・ワインバーグ

テキサス州オースティン

1994 年 10 月

記法

ラテン文字 i, j, k などの添字は, 通常三つの空間座標 1, 2, 3 を意味する.

ギリシャ文字 μ, ν などの添字は, 通常四つの時空座標 1, 2, 3, 0 を意味する. x^0 は時間座標.

繰り返されている添字については, 特に断らない限り, 和を取る.

時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ は対角であり, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, $\eta_{00} = -1$ ととる.

ダランベリアンは $\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\partial^2/\partial x^\mu \partial x^\nu = \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$ と定義する. ここで ∇^2 はラプラシアン $\partial^2/\partial x^i \partial x^i$.

「レビ・チビタ・テンソル」$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は $\epsilon^{0123} = +1$ を満たす完全反対称テンソル.

空間の3元ベクトルは太いボールド体の文字で表す.

ベクトルの上のハット記号 $(\hat{\ })$ は, そのベクトルに対応する単位ベクトルを意味する. つまり, $\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

どの量の上の点 $(\dot{\ })$ も, その量の時間微分を表す.

ディラック行列 γ_μ は, $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$ を満たすように定義され

ている. また, $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, および $\beta = i\gamma^0$ となっている.

階段関数 $\theta(s)$ は, $s > 0$ で $+1$, $s < 0$ で 0 となる関数.

行列またはベクトル A の複素共役, 転置, エルミート共役はそれぞれ, A^*, A^{T}, $A^\dagger = A^{*\mathrm{T}}$ と記す. 演算子 O のエルミート共役は $O^\dagger$ と記す. ただし, 演算子のベクトルや行列が転置されないことを強調するところではアステリスク (*) を使う. 式の終りの +H.c. または +c.c. は, それぞれ前の項のエルミート共役か複素共役の項をたすことを意味する. ディラック・スピノル u の上の棒線は, $\bar{u} = u^\dagger\beta$ を意味する.

1 章を除いては, $\hbar$ と光速を 1 にとる単位系を用いる. この本を通して, $-e$ は電子の有理系での電荷であり, 微細構造定数は $\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$ となっている.

引用した数値データの終りの括弧内の数字は, そのデータの末尾の数字の不確定性を意味する. 特に述べない限り, 実験データは 'Review of Particle Properties,' *Phys. Rev.* **D50**, 1173 (1994) より引用している.

第 7 章

正準形式

1920 年代後期にボルン, ディラック, フェルミ, ハイゼンベルグ, ヨルダン, パウリの論文で場の量子論が誕生して以来, その発展は歴史的に正準量子化と強く結びついてきた. そのために, 今日, 場の量子論の取り扱いはまずラグランジアンを仮定してそれに正準量子化の規則を適用することから始めるのが自然なように思われている. これは場の量子論の大抵の本で採用されているやり方だ. しかし, 歴史的な慣例だからといって, それがこの形式を用いる理由として強い説得力をもつわけではない. もし物理的に満足のいく S 行列を導く場の量子論が見つかれば, それが何らかのラグランジアンの正準量子化によって導かれるかどうかで頭を悩ますだろうか?

この質問には少しばかり議論の余地がある. なぜなら, 7.1 節で見るように, 最もよく知られた場の量子論はすべて正準系を備えており, これらは容易にラグランジアン形式に持っていける. しかし, 考えられるあらゆる場の量子論がこのように定式化できるという証明はない. しかも, たとえそれができたとしても, それ自身は, なぜ様々な場の量子論を構築する際の出発点としてラグランジアン形式を優先的に用いるべきかという理由の説明にはならない.

ラグランジアン形式の要点は, ローレンツ不変性や他の対称性を満たすことが容易になるという点だ. ローレンツ不変なラグランジアン密度を持つ古典的な理論は, 正準量子化するとローレンツ不変な量子論を導く. すなわち, この章で見るように, そのような理論では, ポアンカレ代数の交換関係を満たす量子力学的演算子を構成でき, よって, S 行列はローレンツ不変となる.

これはそれほど自明な事ではない. 前の章で見たように, 微分結合やスピン $j \geq 1$ を持つ理論では相互作用ハミルトニアンをスカラー相互作用密度の空間積分にとるだけでは十分でなく, プロパゲーターの共変でない項を補正するために相互作用密度に非スカラー項を加える必要がある. スカラーのラグランジアン密度を持つ正準形式では自動的にこの余分な項がでてくる. 後に 3 巻で非可換ゲージ理論を扱うときには, この簡便さが必要性に変わる. そのような理論ではローレンツ不変でゲージ不変なラグランジアン密度から出発せずにハミルトニアンの形を推察する事はほとんど絶望的であろう.

7.1 正準変数

この節では, これまでに構築してきた様々な場の量子論がハミルトニアンを使った正準形式の交換則と運動方程式を満たすことを見る. S 行列を計算するのに必要なのは (演算子法か経路積分法かによらず) ハミルトニアン形式だが, ローレンツ不変な S 行列を与えるハミルトニアンを選ぶことがいつでも簡単にできるわけではない. この章では以後, ラグランジアン版の正準形式から出発して, それを用いて物理的に満足のいくハミルトニアンを導く. この節の目的は, 様々な場の理論の正準場とその共役場を同定し, ラグランジアンの自由場項を分離する仕方を説明し, 同時に, 正準形式が実際物理的に現実的な理論に適用できることを再確認することだ.

最初に, 5 章で構成した自由場は量子演算子 $q^n(\mathbf{x},t)$ と正準共役演算子 $p_n(\mathbf{x},t)$ の系を自動的に与え, それらはよく知られた以下の正準交換関係または反交換関係を満たすことを示す.

$$[q^n(\mathbf{x},t), p_{\bar{n}}(\mathbf{y},t)]_{\mp} = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta^n_{\bar{n}} , \tag{7.1.1}$$

$$[q^n(\mathbf{x},t), q^{\bar{n}}(\mathbf{y},t)]_{\mp} = 0 , \tag{7.1.2}$$

$$[p_n(\mathbf{x},t), p_{\bar{n}}(\mathbf{y},t)]_{\mp} = 0 . \tag{7.1.3}$$

ここで添字 $\mp$ は, 二つの演算子によって生成・消滅させられる粒子のどちらかがボソンなら交換子であり, 両方ともがフェルミオンなら反交換子を表す. 例えば, 5.2 節で見たように, 荷電自己共役なスピンゼロ粒子の実スカラー場 $\phi(\mathbf{x})$ は以下の交換関係に従う.

$$[\phi(x), \phi(y)]_- = \Delta(x-y) .$$

ここで, Δ は, $k^0 \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$ として, 以下の関数だ.

$$\Delta(x) \equiv \int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3}[e^{ik\cdot x} - e^{-ik\cdot x}] .$$

ここで次のことに留意する.

$$\Delta(\mathbf{x},0) = 0 , \qquad \dot{\Delta}(\mathbf{x},0) = -i\delta^3(\mathbf{x}) .$$

(ドット「˙」は時刻 x^0 についての微分を表す.) 場とその時間微分 $\dot{\phi}$ が以下の同時刻交換関係に従うことは容易にわかる.

$$[\phi(\mathbf{x},t), \dot{\phi}(\mathbf{y},t)]_- = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) , \tag{7.1.4}$$

$$[\phi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)]_- = 0 , \tag{7.1.5}$$

$$[\dot{\phi}(\mathbf{x},t), \dot{\phi}(\mathbf{y},t)]_- = 0 . \tag{7.1.6}$$

よって正準交換関係 (7.1.1)–(7.1.3) を満たす正準変数,

$$q(\mathbf{x},t) \equiv \phi(\mathbf{x},t)\ , \qquad p(\mathbf{x},t) \equiv \dot{\phi}(\mathbf{x},t) \tag{7.1.7}$$

を定義できる.

スピンゼロ粒子の複素スカラー場では粒子と反粒子が異なり, 交換関係は以下のとおりだ.

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)]_- = \Delta(x-y)\ , \qquad [\phi(x), \phi(y)]_- = 0\ .$$

よって, 自由粒子の正準変数を複素演算子,

$$q(\mathbf{x},t) \equiv \phi(\mathbf{x},t)\ , \tag{7.1.8}$$

$$p(\mathbf{x},t) \equiv \dot{\phi}^\dagger(\mathbf{x},t) \tag{7.1.9}$$

と定義できる. 同じことだが, エルミートな ϕ_k $(k=1,2)$ を使って $\phi \equiv (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ と書くと, 正準変数は,

$$q^k(\mathbf{x},t) = \phi_k(\mathbf{x},t)\ , \tag{7.1.10}$$

$$p_k(\mathbf{x},t) = \dot{\phi}_k(\mathbf{x},t) \tag{7.1.11}$$

となり, これは交換関係 (7.1.1)–(7.1.3) を満たす.

スピン 1 粒子の実ベクトル場の場合, 交換関係は 5.3 節で見たように以下で与えられる.

$$[v^\mu(x), v^\nu(y)]_- = \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2}\right] \Delta(x-y)\ .$$

(ベクトル場として V^μ ではなく v^μ を使っている. これは, ここでは大文字をハイゼンベルグ表示の場を表すために取っておきたいからだ.) ここで自由粒子の正準変数を $i=1,2,3$ について以下のように取れる.

$$q^i(\mathbf{x},t) = v^i(\mathbf{x},t)\ , \tag{7.1.12}$$

$$p_i(\mathbf{x},t) = \dot{v}^i(\mathbf{x},t) + \frac{\partial v^0(\mathbf{x},t)}{\partial x^i} \,. \tag{7.1.13}$$

読者は (7.1.12) と (7.1.13) が交換関係 (7.1.1)–(7.1.3) を満たすことを確認してほしい. 場の方程式 (5.3.36) と (5.3.38) および式 (7.1.13) より, v^0 はその他の変数を用いて,

$$v^0 = m^{-2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{p} \tag{7.1.14}$$

と表すことができ, v^0 は q の一つとは見なされない. この結果を複素ベクトル場に拡張することは, 複素スカラー場の場合とまったく同様にしてできる.

非マヨラナ・スピン $\frac{1}{2}$ 粒子のディラック場の場合は, 5.5 節で示したように, 反交換子は以下のとおりだ.

$$[\psi_n(x), \psi^\dagger_{\bar{n}}(y)]_+ = \Big[(-\gamma^\mu\partial_\mu + m)\beta\Big]_{n,\bar{n}}\Delta(x-y),$$

$$[\psi_n(x), \psi_{\bar{n}}(y)]_+ = 0 \,.$$

ここで, ψ_n と $\psi^\dagger_n$ を独立な正準変数にとると矛盾が生じる. なぜなら, 両者の反交換子は同時刻でゼロにならないからだ. その代わりに, 通常以下のように定義する.

$$q^n(x) \equiv \psi_n(x) \,, \tag{7.1.15}$$

$$p_n(x) \equiv i\psi^\dagger_n(x) \,. \tag{7.1.16}$$

すると, (7.1.15) と (7.1.16) は正準反交換関係 (7.1.1)–(7.1.3) を満たすことが容易にわかる

(7.1.1)–(7.1.3) のような交換関係または反交換関係を満たす任意の演算子の系について, 量子力学的な汎関数微分を以下のように定義できる. すなわち, 固定した時刻 t での $q^n(\mathbf{x},t)$ と $p_n(\mathbf{x},t)$ の任意のボゾン的汎関数 $F[q(t),p(t)]$ について,

$$\frac{\delta F[q(t),p(t)]}{\delta q^n(\mathbf{x},t)} \equiv i\Big[p_n(\mathbf{x},t)\,,\, F[q(t),p(t)]\Big] \,, \tag{7.1.17}$$

$$\frac{\delta F[q(t),p(t)]}{\delta p_n(\mathbf{x},t)} \equiv i\Big[F[q(t),p(t)]\,,\,q^n(\mathbf{x},t)\Big] \qquad (7.1.18)$$

と定義する.* この定義は, もし, 全ての q が全ての p の左に来るように $F[q(t),p(t)]$ が書かれていれば, (7.1.17) と (7.1.18) はそれぞれちょうど q^n と p_n に関する左微分と右微分だという事実に由来する. すなわち, q と p の任意の c 数** の変分 δq と δp に対して,

$$\delta F[q(t),p(t)] = \int d^3x \sum_n \left(\delta q^n(\mathbf{x},t)\frac{\delta F[q(t),p(t)]}{\delta q^n(\mathbf{x},t)} + \frac{\delta F[q(t),p(t)]}{\delta p_n(\mathbf{x},t)}\delta p_n(\mathbf{x},t)\right)$$

となる. もっと一般的な汎関数の場合には, 定義 (7.1.17) と (7.1.18) を用いて, そこに現れる種々の符号や同時刻交換子を決める必要がある.

特に, H_0 は,

$$q^n(\mathbf{x},t) = \exp(iH_0t)q^n(\mathbf{x},0)\exp(-iH_0t)\ , \qquad (7.1.19)$$

$$p_n(\mathbf{x},t) = \exp(iH_0t)p_n(\mathbf{x},0)\exp(-iH_0t) \qquad (7.1.20)$$

の意味で自由粒子状態の時間推進演算子なので, 自由粒子演算子は, 以下の時間依存性を持つ.

$$\dot{q}^n(\mathbf{x},t) = i[H_0, q^n(\mathbf{x},t)] = \frac{\delta H_0}{\delta p_n(\mathbf{x},t)}\ , \qquad (7.1.21)$$

$$\dot{p}_n(\mathbf{x},t) = -i[p_n(\mathbf{x},t), H_0] = -\frac{\delta H_0}{\delta q^n(\mathbf{x},t)}\ . \qquad (7.1.22)$$

これらは, ハミルトニアン形式でよく知られた運動方程式だ.

---

*ここでは, 今後とも採用する記法を使っている. この記法では, $f(x,y)$ が, x および y と呼ばれる 2 種類の変数の集合の関数のとき, $F[f(y)]$ は, y を固定したときの全ての x に対する $f(x,y)$ の値に依存する汎関数を表す. ここで, ボゾン的汎関数とは各項が偶数個だけのフェルミオン場を含む汎関数という意味だ.

**q^n と p_n がボゾン的またはフェルミオン的なとき, δq^n と δp_n は全てのフェルミオン演算子とそれぞれ交換または反交換し, 全てのボゾン演算子と交換すると理解する.

自由粒子のハミルトニアンは通常どおり以下で与えられる.

$$H_0 = \sum_{n,\sigma} \int d^3k\; a^\dagger(\mathbf{k},\sigma,n)\, a(\mathbf{k},\sigma,n)\, \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_n^2}\,. \tag{7.1.23}$$

この H_0 は時刻 t での q と p を用いて書き換えることができる. 例えば, 実スカラー場の場合, (7.1.23) は定数項を除いて汎関数,

$$H_0 = \int d^3x \left[\tfrac{1}{2}\, p^2 + \tfrac{1}{2}\, (\nabla q)^2 + \tfrac{1}{2}\, m^2\, q^2\right] \tag{7.1.24}$$

に等しいことが容易にわかる. より正確には, (7.1.7) とスカラー場 ϕ のフーリエ表現を使って, (7.1.24) は以下のようになる.

$$\begin{aligned} H_0 &= \tfrac{1}{2} \int d^3k\, k^0 \Big[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})\Big]_+ \\ &= \int d^3k\, k^0 \left(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + \tfrac{1}{2}\, \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k})\right). \end{aligned} \tag{7.1.25}$$

これは無限大の定数項を除いて (7.1.23) に等しい. そのような項はエネルギーのゼロ点に影響するだけで, 重力がなければ物理的な意味は無い.† その他の場について H_0 を変数 q と p の汎関数として陽に表すことは 7.5 節で行う.

普通, 場の量子論の教科書では (7.1.24) の結果として (7.1.25) を導く. そして, (7.1.24) はラグランジアン密度から導かれる. 私にはこれは逆のように思える. なぜなら (7.1.25) は成り立たねばならないからだ. もし仮定した自由粒子のラグランジアンが定数項を除いて (7.1.25) を与えなければ, それは正しくないラグランジアンだと結論するであろう. しかしむしろ, どのような自由場のラグランジアンがスピンゼロ粒子について (7.1.25) を与えるか, あるいはもっと一般的に, 自由粒子ハミルトニアン (7.1.23) を与えるかを問うべきである. この問いに

---

† しかし, 場の境界条件の変化によるそのような項の変化は, 例えば無限の空間ではなくて平行平板間の空間における量子化のように, 物理的に意味があり, 実際測定されているものもある.[1]

は, ハミルトニアンからラグランジアンへのよく知られたルジャンドル変換を使って答えることができる. 自由場のラグランジアンは以下で与えられる.

$$L_0[q(t), \dot{q}(t)] = \sum_n \int d^3x\, p_n(\mathbf{x}, t)\, \dot{q}^n(\mathbf{x}, t) \; - \; H_0 \, . \tag{7.1.26}$$

ここで, p_n はすべてそれを q^n と $\dot{q}^n$ (および, 後で見るように, たぶん何らかの補助場も含む) で表したもので置き換える. 例えば, ハミルトニアン (7.1.24) と (7.1.7) からスカラー場についての自由場のラグランジアンを以下のように導ける.

$$\begin{aligned} L_0 &= \int d^3x \left[p\dot{q} - \tfrac{1}{2}\, p^2 - \tfrac{1}{2}\, (\boldsymbol{\nabla} q)^2 - \tfrac{1}{2}\, m^2 q^2\right] \\ &= \int d^3x \left[-\tfrac{1}{2}\, \partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi - \tfrac{1}{2}\, m^2 \phi^2\right] . \end{aligned} \tag{7.1.27}$$

スカラー場の完全なラグランジアンがどのようなものだろうと, これは, 分離して取り出され, 摂動論のゼロ次項として取り扱われなければならない. この節で取り扱う他の正準系についても同様なやり方をする事ができるが, 以後は, 自由場のラグランジアンの形を推察して, 次にそれが正しい自由粒子のハミルトニアンを与えることを確かめることで満足することにする.

様々な自由場の理論が正準形式で定式化できることはすでに見た. 同じことが相互作用する場についても成り立つことを示すのは簡単だ. 以下で定義されるいわゆる「ハイゼンベルグ表示」での正準変数を導入することができる.

$$Q^n(\mathbf{x}, t) \equiv \exp(iHt) q^n(\mathbf{x}, 0) \exp(-iHt), \tag{7.1.28}$$

$$P_n(\mathbf{x}, t) \equiv \exp(iHt) p_n(\mathbf{x}, 0) \exp(-iHt). \tag{7.1.29}$$

ここで H は全ハミルトニアンだ. これは H と交換する相似変換なので, 全ハミルトニアンは, q と p の汎関数として, ハイゼンベルグ表示

の演算子についても同じ汎関数だ.

$$H[Q,P] = e^{iHt}H[q,p]e^{-iHt} = H[q,p] \ .$$

また, (7.1.28)–(7.1.29) は相似変換なので, ハイゼンベルグ表示の演算子はここでも正準交換関係または反交換関係を満たす.

$$[Q^n(\mathbf{x},t), P_{\bar{n}}(\mathbf{y},t)]_{\mp} = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta^n_{\bar{n}} \ , \tag{7.1.30}$$

$$[Q^n(\mathbf{x},t), Q^{\bar{n}}(\mathbf{y},t)]_{\mp} = 0 \ , \tag{7.1.31}$$

$$[P_n(\mathbf{x},t), P_{\bar{n}}(\mathbf{y},t)]_{\mp} = 0 \ . \tag{7.1.32}$$

しかしそれらの演算子は今度は時刻に依存する.

$$\dot{Q}^n(\mathbf{x},t) = i[H, Q^n(\mathbf{x},t)] = \frac{\delta H}{\delta P_n(\mathbf{x},t)} \ , \tag{7.1.33}$$

$$\dot{P}_n(\mathbf{x},t) = -i[P_n(\mathbf{x},t), H] = -\frac{\delta H}{\delta Q^n(\mathbf{x},t)} \ . \tag{7.1.34}$$

例えば, 実スカラー場のハミルトニアンは自由粒子の項 (7.1.24) とスカラー相互作用密度 $\mathcal{H}$ の和にとれる. よって, ハイゼンベルグ表示の変数で書くと以下のとおりだ.

$$H = \int d^3x \left[\tfrac{1}{2}\, P^2 + \tfrac{1}{2}\, (\nabla Q)^2 + \tfrac{1}{2}\, m^2\, Q^2 + \mathcal{H}(Q)\right] \tag{7.1.35}$$

この場合, Q の正準共役量は自由場の場合と同じ式で与えられる.

$$P = \dot{Q} \ . \tag{7.1.36}$$

しかし, 後で見るように, 正準共役量 $P_n(x)$ と場の変数およびその時間微分との間の関係は, 一般に自由粒子演算子の場合と同じではなく, (7.1.33) と (7.1.34) から導かれねばならない.

7.2 ラグランジアン形式

様々な現実的な理論が正準形式に書けることを見てきたが, 今度はハミルトニアンをどう選ぶかという問題に直面する. 次の節で見るように, ローレンツ不変性やその他の対称性を課すための最も簡単な方法は, 適切なラグランジアンを選びそれからハミルトニアンを導くことだ. これはあまり一般性を失わずに実行できる. 現実的なハミルトニアンが与えられると, 一般にそれを導くラグランジアンを再構成でる. そのやり方は, この章で記述するラグランジアンからハミルトニアンを導く過程の逆をたどればよい. (この再構成の一例としては (7.1.26) の導出がある.) ハミルトニアンからラグランジアン, あるいはラグランジアンからハミルトニアンに移れるが, 物理的に満足のいく理論を探すには, 可能なハミルトニアンよりむしろ可能なラグランジアンを調べ上げた方が簡単だ.

一般に, ラグランジアンは一組の場 $\Psi^\ell(\mathbf{x},t)$ とその時間微分 $\dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x},t)$ の汎関数* $L[\Psi(t),\dot{\Psi}(t)]$ だ. 共役場 $\Pi_\ell(\mathbf{x},t)$ は汎関数微分**

$$\Pi_\ell(\mathbf{x},t) \equiv \frac{\delta L[\Psi(t),\dot{\Psi}(t)]}{\delta\dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x},t)} \tag{7.2.1}$$

で定義される. 運動方程式は以下のとおりだ.

$$\dot{\Pi}_\ell(\mathbf{x},t) = \frac{\delta L[\Psi(t),\dot{\Psi}(t)]}{\delta\Psi^\ell(\mathbf{x},t)}\,. \tag{7.2.2}$$

これらの場の方程式は変分原理として再定式化でき, これは有用だ.

---

*汎関数に対して用いる記法では, 以下のことを思い出そう. 変数 t を明示する L のような汎関数は場 $\Psi^\ell(\mathbf{x},t)$ と $\dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x},t)$ に依存すると理解する. ここで, 表示されていない変数 ℓ と $\mathbf{x}$ は, 表示されている変数 t の値を固定した上で, 全ての値を動く. 大文字 Ψ と Π は, それらが自由場ではなく相互作用する場であることを示す.

**一般に Ψ と $\dot{\Psi}$ は簡単な交換関係または反交換関係を満たすわけではないので, 前節で Q と P についての汎関数微分で与えたような簡単な定義をここでの汎関数微分に与えることはできない. その代わり, 汎関数微分は単に c 数の変数の場合と同じものと見なす. ただし, 式を量子力学的に正しくするために, 必要な時にはマイナス符号と同時刻交換子または反交換子とを付与する. 著者の知る限り, 重要な事項でこれらの詳細に依存するものはない.

作用 (action) として知られる, $\Psi^\ell(x)$ の全時空間にわたる汎関数を以下のように定義する.

$$I[\Psi] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt\, L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]\,. \tag{7.2.3}$$

$\Psi(x)$ の任意の変分のもとで, $I[\Psi]$ の変化は以下のとおりだ.

$$\delta I[\Psi] = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x \left[\frac{\delta L}{\delta\Psi^\ell(x)}\,\delta\Psi^\ell(x) + \frac{\delta L}{\delta\dot{\Psi}^\ell(x)}\,\delta\dot{\Psi}^\ell(x)\right]\,.$$

$\delta\Psi^\ell(x)$ は $t \to \pm\infty$ でゼロになると仮定すると部分積分できて,

$$\delta I[\Psi] = \int d^4x \left[\frac{\delta L}{\delta\Psi^\ell(x)} - \frac{d}{dt}\,\frac{\delta L}{\delta\dot{\Psi}^\ell(x)}\right]\delta\Psi^\ell(x) \tag{7.2.4}$$

と書ける. 場が場の方程式 (7.2.2) を満たせば, またその時に限り, $t \to \pm\infty$ でゼロになるあらゆる変分 $\delta\Psi^\ell$ について作用が停留することがわかる.

場の方程式は汎関数 $I[\Psi]$ により決定されるので, ローレンツ不変な理論を構成するには $I[\Psi]$ をスカラーの汎関数にするのが自然だ. 特に, $I[\Psi]$ は $L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]$ の時間積分なので, L 自身は, $\Psi(x)$ と $\partial\Psi(x)/\partial x^\mu$ の通常のスカラー関数の空間積分であるべきだと推察できる. このスカラー関数は**ラグランジアン密度** $\mathcal{L}$ として知られている.

$$L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)] = \int d^3x\, \mathcal{L}\Big(\Psi(\mathbf{x},t), \boldsymbol{\nabla}\Psi(\mathbf{x},t),\ \dot{\Psi}(\mathbf{x},t)\Big)\,. \tag{7.2.5}$$

すると作用は, 以下のとおりだ.

$$I[\Psi] = \int d^4x\, \mathcal{L}\Big(\Psi(x), \partial\Psi(x)/\partial x^\mu\Big)\,. \tag{7.2.6}$$

現在の素粒子論で使われている全ての場の理論はこの形のラグランジアンを持っている.

$\Psi^\ell(x)$ を $\delta\Psi^\ell(x)$ だけ変化させ, 部分積分すると, L の変化は,

$$\begin{aligned}\delta L &= \int d^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^\ell}\,\delta\Psi^\ell + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\Psi^\ell)}\boldsymbol{\nabla}\delta\Psi^\ell + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Psi}^\ell}\,\delta\dot{\Psi}^\ell\right]\\ &= \int d^3x \left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^\ell} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\Psi^\ell)}\right)\delta\Psi^\ell + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Psi}^\ell}\,\delta\dot{\Psi}^\ell\right]\end{aligned}$$

となり，よって（明白な引数を省略して），

$$\frac{\delta L}{\delta \Psi^\ell} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^\ell} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\boldsymbol{\nabla} \Psi^\ell)} , \tag{7.2.7}$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\Psi}^\ell} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}^\ell} \tag{7.2.8}$$

となる．すると場の方程式 (7.2.2) は，

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Psi^\ell / \partial x^\mu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^\ell} \tag{7.2.9}$$

となる．これは**オイラー・ラグランジュ方程式** (Euler–Lagrange equation) として知られている．期待したとおり，もし $\mathcal{L}$ がスカラーなら，この方程式はローレンツ不変だ．

作用 I は，ローレンツ不変であることに加えて，実である必要がある．これは，ちょうど存在する場の数だけの場の方程式が欲しいからだ．任意の複素場を実部と虚部に分解して，常に I をいくつかの実の場のみの汎関数と考えることができる．例えば，その数を N とする．もし，I が複素で，独立な実部と虚部を持つなら，I が停留する条件（オイラー・ラグランジュ方程式）の実部と虚部は，N 個の場に対して $2N$ 個の場の方程式を与え，これは特殊な場合を除いて多すぎて満たすことができない．次の節で見るように，作用が実である条件はまた，様々な対称変換の生成子がエルミート演算子であることを保証する．

ラグランジアン形式を用いるとローレンツ不変性やその他の対称性を満たす理論を構成することが容易になるが，S 行列を計算するには相互作用ハミルトニアンの式が必要だ．一般に，ハミルトニアンは**ルジャンドル変換** (Legendre transformation) により以下のように得られる．

$$H = \sum_\ell \int d^3x \, \Pi_\ell(\mathbf{x}, t) \dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x}, t) - L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)] \, . \tag{7.2.10}$$

一般に (7.2.1) から $\dot{\Psi}^\ell$ が Ψ^ℓ と Π_ℓ とで一意的に表されるわけではないが，(7.2.1) を満たす任意の $\dot{\Psi}^\ell$ に関する (7.2.10) の汎関数微分がゼ

ロになることは容易にわかるので, (7.2.10) は一般に Ψ^ℓ と Π_ℓ のみの汎関数だ. これらの変数に関する (7.2.10) の汎関数微分は以下のようになる.

$$\left.\frac{\delta H}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x},t)}\right|_\Pi = \int d^3y \sum_{\ell'} \Pi_{\ell'}(\mathbf{y},t) \left.\frac{\delta \dot{\Psi}^{\ell'}(\mathbf{y},t)}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x},t)}\right|_\Pi - \left.\frac{\delta L}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x},t)}\right|_{\dot{\Psi}}$$

$$- \int d^3y \sum_{\ell'} \left.\frac{\delta L}{\delta \dot{\Psi}^{\ell'}(\mathbf{y},t)}\right|_\Psi \left.\frac{\delta \dot{\Psi}^{\ell'}(\mathbf{y},t)}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x},t)}\right|_\Pi ,$$

$$\left.\frac{\delta H}{\delta \Pi_\ell(\mathbf{x},t)}\right|_\Psi = \dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x},t) + \int d^3y \sum_{\ell'} \Pi_{\ell'}(\mathbf{y},t) \left.\frac{\delta \dot{\Psi}^{\ell'}(\mathbf{y},t)}{\delta \Pi_\ell(\mathbf{x},t)}\right|_\Psi$$

$$- \int d^3y \sum_{\ell'} \left.\frac{\delta L}{\delta \dot{\Psi}^{\ell'}(\mathbf{y},t)}\right|_\Psi \left.\frac{\delta \dot{\Psi}^{\ell'}(\mathbf{y},t)}{\delta \Pi_\ell(\mathbf{x},t)}\right|_\Psi .$$

ここで, 下付きの添字はこれらの汎関数微分をとる際に固定される量を示す. Π_ℓ の定義式 (7.2.1) を用いると, これは以下のように簡単になる.

$$\left.\frac{\delta H}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x},t)}\right|_\Pi = - \left.\frac{\delta L}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x},t)}\right|_{\dot{\Psi}} , \tag{7.2.11}$$

$$\left.\frac{\delta H}{\delta \Pi_\ell(\mathbf{x},t)}\right|_\Psi = \dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x},t) . \tag{7.2.12}$$

すると, 運動方程式 (7.2.2) は,

$$\left.\frac{\delta H}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x},t)}\right|_\Pi = -\dot{\Pi}_\ell(\mathbf{x},t) \tag{7.2.13}$$

に同等だ.

ここで, 一般の場の変数 Ψ^ℓ とその共役場 Π_ℓ を前節の Q^n と P_n とに同定し, それらに同じ正準交換関係 (7.1.30)–(7.1.32) を課したくなる. そうすると, (7.2.12) と (7.2.13) はハミルトニアン運動方程式 (7.1.33) および (7.1.34) と同じになる. これは微分結合を持たない実スカラー場 Φ という簡単な例では確かに正しい. 前の節で見つけた

自由場のラグランジアン密度に Φ の実関数 $-\mathcal{H}(\Phi)$ を付け加えて得られた以下のラグランジアン密度† を考える.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\,\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{m^2}{2}\Phi^2 - \mathcal{H}(\Phi)\,. \tag{7.2.14}$$

ここで, オイラー・ラグランジュ方程式は以下のとおりだ.

$$(\Box - m^2)\Phi = \mathcal{H}'(\Phi)\,. \tag{7.2.15}$$

このラグランジアン密度から, Φ の正準共役量が,

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}} = \dot{\Phi} \tag{7.2.16}$$

と計算され, これは, Φ と Π を正準変数 Q と P に同定すれば, (7.1.36) と同じだ. ここで, ハミルトニアンは (7.2.10) から,

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x\,(\Pi\dot{\Phi} - \mathcal{L}) \\ &= \int d^3x\left[\tfrac{1}{2}\,\Pi^2 + \tfrac{1}{2}\,(\nabla\Phi)^2 + \tfrac{1}{2}\,m^2\Phi^2 + \mathcal{H}(\Phi)\right] \end{aligned} \tag{7.2.17}$$

となり,‡ これはハミルトニアン (7.1.35) と同じだ. この短い演習はこのハミルトニアンの別の導出とみなすべきではなく, むしろ, ラグランジアン (7.2.14) がスカラー場の可能な理論であることを確認するものだ.

しかし, 事はいつもそう単純ではない. ベクトル場の時間成分やディラック場のエルミート共役場のように, 場の正準変数 Q^n でなくかつ

---

†ここで, $-\frac{1}{2}\,\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi$ の項に自由な定数因子を含ませていない. なぜなら, そのような定数は正であれば Φ の規格化に吸収できるからだ. 後で見るように, これが負の定数ならば, ハミルトニアンは下に有界にはならない. 定数 m は裸の質量として知られている. くりこみ可能性の原理 (これは 12 章で議論する) を満たす最も一般的なラグランジアンは, $\mathcal{H}(\Phi)$ を Φ の 4 次の多項式として, この形をしている.

‡H をエネルギーと解釈するためには, それは下に有界でなければならない. 最初の 2 項が正であることから, (7.2.14) の第 1 項の符号が正しかったことがわかる. 残った条件は, $\frac{1}{2}m^2\Phi^2 + \mathcal{H}(\Phi)$ が Φ の関数として下に有界でなければならないということだ.

正準共役場も持たない場の変数が存在することは前節ですでに見た．しかし，ローレンツ不変性を満たすには，これらの変数がベクトル場とディラック場のラグランジアンの中に現れなければならない．

ラグランジアン形式の観点からは，ベクトル場の時間成分やディラック場のエルミート共役場のような場の変数の特殊な性質は，それがラグランジアンに現れるがその時間微分は現れないことによる．時間微分がラグランジアンに現れない場の変数 Ψ^ℓ を C^r と表す．残りの独立な場の変数は正準変数 Q^n だ．その Q^n は正準共役量，

$$P_n(\mathbf{x},t) = \frac{\delta L[Q(t),\dot{Q}(t),C(t)]}{\delta \dot{Q}^n(\mathbf{x},t)} \tag{7.2.18}$$

を持ち，交換関係 (7.1.30)–(7.1.32) を満たすが，C^r には正準共役量がない．$\delta L/\delta \dot{C}^r = 0$ なので，ハミルトニアン (7.2.10) は一般に，

$$H = \sum_m \int d^3x\; P_n\,\dot{Q}^n - L[Q(t),\dot{Q}(t),C(t)] \tag{7.2.19}$$

だが，これは C^r と $\dot{Q}^\ell$ を Q と P とで表すまでは有用ではない．C^r の運動方程式は，場とその時間に関する 1 回微分のみを含む．

$$0 = \frac{\delta L[Q(t),\dot{Q}(t),C(t)]}{\delta C^r(\mathbf{x},t)}\,. \tag{7.2.20}$$

この章で議論する簡単な場合には，これらの方程式は (7.2.18) と合わせると解けて，C^r と $\dot{Q}^\ell$ は Q と P で表される．7.6 節では，そのような場合，C^r と $\dot{Q}^\ell$ を実際に解く作業をいかにして避けることができるかを示す．電磁理論のようなゲージ理論では，他の方法を使わねばならない．8 章で行うように特別なゲージを選ぶか，あるいは 3 巻で議論するもっと現代的で共変な方法を選ぶ．

ハイゼンベルグ表示の Q と P の汎関数としてハミルトニアンを導き，次に摂動論を使うためには，相互作用表示に移らねばならない．ハミルトニアンは時間に依存しないので，$t=0$ での P_n と Q^n で書け，

それは $t=0$ での対応する相互作用表示の p_n と q^n に等しい. このようにして導いたハミルトニアンは相互作用表示の q と p で表すことができ, それは自由粒子の項 H_0 と相互作用 V の二つの部分に分かれる. 最後に, 時間依存性の式 (7.1.21) と (7.1.22) および交換関係または反交換関係 (7.1.1)–(7.1.2) を使って $V(t)$ の中の q と p が消滅・生成演算子の線形結合として表される.

7.5 節でこの処法のいくつかの例を示すが, とりあえずここでは最も簡単な例として, ハミルトニアン (7.2.17) を持つスカラー場だけを見る. H を以下のように自由粒子の項と相互作用に分離する.

$$H = H_0 + V\ , \tag{7.2.21}$$

$$H_0 = \int d^3x \left[\tfrac{1}{2}\,\Pi^2 + \tfrac{1}{2}\,(\nabla\Phi)^2 + \tfrac{1}{2}\,m^2\,\Phi^2\right]\ , \tag{7.2.22}$$

$$V = \int d^3x\, \mathcal{H}(\Phi)\ . \tag{7.2.23}$$

ここで, Φ と Π は同時刻 t にとる. また, H は t に依らないが, H_0 と V は通常そうではない.

ここで相互作用表示に移行する. (7.2.22) と (7.2.23) で $t=0$ ととると, 単に Φ, Π を相互作用表示の変数 ϕ, π で置き換えることができる. なぜなら, (7.1.28) と (7.1.29) よりその時刻ではそれらは等しいと定義されているからだ. 相互作用表示での相互作用 $V(t)$ を計算するには, 以下のように相似変換 (3.5.5) を適用する.

$$\begin{aligned} V(t) &= \exp(iH_0t)\,V\,\exp(-iH_0t) \\ &= \int d^3x\,\mathcal{H}\Big(\phi(\mathbf{x},t)\Big)\ . \end{aligned} \tag{7.2.24}$$

同じ変換を H_0 に施しても変化はない.

$$\begin{aligned} H_0 &= \exp(iH_0t)\,H_0\,\exp(-iH_0(t)) \\ &= \int d^3x \left[\tfrac{1}{2}\,\pi^2(\mathbf{x},t) + \tfrac{1}{2}\,\Big(\nabla\phi(\mathbf{x},t)\Big)^2 + \tfrac{1}{2}\,m^2\phi^2\right]\ . \end{aligned} \tag{7.2.25}$$

π と $\dot{\phi}$ との関係は (7.1.21) により決められている.

$$\dot{\phi}(\mathbf{x},t) = \frac{\delta H_0}{\delta\pi(\mathbf{x},t)} = \pi(\mathbf{x},t)\ . \tag{7.2.26}$$

(これはたまたま (7.2.16) と同じ関係だが, 後で見るようにこれは一般に期待すべきものではない.) また, ϕ の運動方程式は (7.1.22) より,

$$\dot{\pi}(\mathbf{x},t) = -\frac{\delta H_0}{\delta\phi(\mathbf{x},t)} = +\nabla^2\phi(\mathbf{x},t) - m^2\phi(\mathbf{x},t) \tag{7.2.27}$$

と与えられ, (7.2.26) と合わせると以下の場の方程式が得られる.

$$(\Box - m^2)\phi(x) = 0\ . \tag{7.2.28}$$

この方程式の実の一般解は以下のように表される.

$$\phi(x) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3p(2p^0)^{-1/2}\Big[e^{ip\cdot x}a(\mathbf{p}) + e^{-ip\cdot x}a^\dagger(\mathbf{p})\Big]. \tag{7.2.29}$$

ここで, $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ と理解し, $a(\mathbf{p})$ はいまのところ $\mathbf{p}$ の未知の演算子関数だとする. すると (7.2.26) より正準共役量が以下のように得られる.

$$\pi(x) = -i(2\pi)^{-3/2}\int d^3p\ (p^0/2)^{1/2}\Big[e^{ip\cdot x}a(\mathbf{p}) - e^{-ip\cdot x}a^\dagger(\mathbf{p})\Big]\ . \tag{7.2.30}$$

欲しい交換関係,

$$\Big[\phi(\mathbf{x},t)\,,\,\pi(\mathbf{y},t)\Big]_- = i\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,, \tag{7.2.31}$$

$$\Big[\phi(\mathbf{x},t)\,,\,\phi(\mathbf{y},t)\Big]_- = 0\,, \tag{7.2.32}$$

$$\Big[\pi(\mathbf{x},t)\,,\,\pi(\mathbf{y},t)\Big]_- = 0 \tag{7.2.33}$$

を得るには, a はよく知られた交換関係,

$$\Big[a(\mathbf{p}),\ a^\dagger(\mathbf{p}')\Big] = \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}'), \tag{7.2.34}$$

$$\Big[a(\mathbf{p}),\ a(\mathbf{p}')\Big] = 0 \tag{7.2.35}$$

を満たすように取らなければならない. また, 前の節ですでに示したように, (7.2.25) でこれらの展開を使うと, 結果に影響を及ぼさない付加的な定数を除いて, 自由粒子ハミルトニアンの通常の式 (4.2.11) を得る. 以前に指摘したように, これらの結果は (7.2.29), (7.2.34) および (7.2.35) (これらは 5 章でまったく別の立場から得られた) の別な導出法と見なすべきではなく, むしろ (7.2.14) の最初の 2 項が実スカラー場の正しい自由粒子ラグランジアンである事の確認と見なすべきだ. これで, 摂動論を用いた S 行列の計算に進むことができる. その際, $V(t)$ として (7.2.24) をとり, 場 $\phi(x)$ は (7.2.29) で与えられるとする.

ここで例示した処方は, 7.5 節でもっと複雑で興味深い例について実行する.

* * *

物理的な理論の様々な可能なラグランジアン密度を考察する際に, 部分積分を適用して, 全微分 $\partial_\mu \mathcal{F}^\mu$ だけ異なる任意のラグランジアン密度を同じとして取り扱うのが一般的だ. 明らかに, そのような全微分項は作用に寄与せず, よって場の方程式に影響しない. また, ラグランジアン密度の空間微分項 $\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}$ はラグランジアンに寄与しないので, ラグランジアンで定義された量子理論に影響しないことも明白だ.¶ ラグランジアン密度中の時間微分 $\partial_0 \mathcal{F}^0$ も量子論の構造には影響しないが, これはそれほど明白ではなくここで指摘しておく価値がある. このことを見るために, 以下のもっと一般的な形の項をラグラジアンに加えたときの効果を最初に考察しよう.

$$\Delta L(t) = \int d^3x\, D_{n,\mathbf{x}}[Q(t)]\, \dot{Q}^n(\mathbf{x}, t)\,. \tag{7.2.36}$$

ここで, D は与えられた時刻での Q の値の汎関数で, n と $\mathbf{x}$ に依存す

¶これは場が無限遠でゼロになるという通常の仮定のもとでのことだ. 4 巻で見るように, 異なるトポロジーを持つ場を許す場合には, これらの結果は必ずしも成り立たない.

る. これは $Q(t)$ と $\dot{Q}(t)$ の汎関数としての共役変数 $P(t)$ の式を,

$$\Delta P_n(\mathbf{x},t) = \frac{\delta\,\Delta L(t)}{\delta\,\dot{Q}^n(\mathbf{x},t)} = D_{n,\mathbf{x}}[Q(t)] \tag{7.2.37}$$

だけ変える. すると, $Q(t)$ と $\dot{Q}(t)$ の汎関数として表したハミルトニアンは変わらない.

$$\int d^3x\,\Delta P_n(\mathbf{x},t)\dot{Q}^n(\mathbf{x},t) - \Delta L(t) = 0. \tag{7.2.38}$$

よって, また古い正準変数 Q^n と P_n の汎関数として表したハミルトニアンも変わらない. しかし, ハミルトニアンは新しい正準変数 Q^n と $P_n + \Delta P_n$ については古い Q^n と P_n の汎関数であったのと同じ汎関数ではない. そして, 新しいラグランジアン $\mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}$ で記述される理論では, 正準交換関係を満たすのは, Q^n と P_n ではなくて新しい正準変数 Q^n と $P_n + \Delta P_n$ だ. Q^n 同士および Q^n と P_m の交換子は通常の正準関係で与えられるが, P_n 同士の交換子は以下のとおりだ.

$$\begin{aligned}
[P_n(\mathbf{x},t), P_m(\mathbf{y},t)] &= [P_n(\mathbf{x},t) + \Delta P_n(\mathbf{x},t), P_m(\mathbf{y},t) + \Delta P_m(\mathbf{y},t)] \\
&\quad -[\Delta P_n(\mathbf{x},t), P_m(\mathbf{y},t) + \Delta P_m(\mathbf{y},t)] \\
&\quad -[P_n(\mathbf{x},t) + \Delta P_n(\mathbf{x},t), \Delta P_m(\mathbf{y},t)] \\
&\quad +[\Delta P_n(\mathbf{x},t), \Delta P_m(\mathbf{y},t)] \\
&= -i\frac{\delta D_{n,\mathbf{x}}[Q(t)]}{\delta Q^m(\mathbf{y},t)} + i\frac{\delta D_{m,\mathbf{y}}[Q(t)]}{\delta Q^n(\mathbf{x},t)}\,.
\end{aligned} \tag{7.2.39}$$

一般にこれはゼロではないが, もしラグランジアンに加えられた項が,

$$\Delta L = \frac{dG}{dt} = \int d^3x\,\frac{\delta G[Q(t)]}{\delta Q^n(\mathbf{x},t)}\dot{Q}^n(\mathbf{x},t) \tag{7.2.40}$$

のように時間の全微分なら, (7.2.36) の D は以下の特別な形をしている.

$$D_{n,\mathbf{x}}[Q] = \frac{\delta G[Q(t)]}{\delta Q^n(\mathbf{x},t)}\,. \tag{7.2.41}$$

この場合, 交換子 (7.2.39) はゼロになり, よって変数 Q^n と P_n は通常の交換関係を満たす. すでに見たようにラグランジアンの (7.2.36) の形の変化は, Q^n と P_n の汎関数としてのハミルトニアンの形を変えない. また, 上で示したように, これらの変数の交換関係も変化しないので, (7.2.36) の項をラグランジアンに付け加えることは量子論の構造に影響しない. よって, 部分積分によってお互いに移り変わる異なるラグランジアン密度は, 古典場の理論と同様に, 場の量子論においても同等と見なされる.

7.3 大域的対称性

ここではラグランジアン形式の重要な点, すなわち, この形式が対称性原理を量子力学的に満たす自然な枠組みを与えるという点について述べる. これは, ラグランジアン形式での運動方程式が, 変分原理すなわち最小作用の原理の形をとるからだ. 場の任意の微小変換,

$$\Psi^\ell(x) \to \Psi^\ell(x) + i\epsilon\,\mathcal{F}^\ell(x) \tag{7.3.1}$$

で, 以下のように作用 (7.2.3) を不変に保つものを考える.

$$0 = \delta I = i\epsilon \int d^4x\, \frac{\delta I[\Psi]}{\delta \Psi^\ell(x)} \mathcal{F}^\ell(x)\,. \tag{7.3.2}$$

(ϵ が定数の場合, そのような対称性は**大域的** (global) 対称性として知られている. 一般に, $\mathcal{F}^\ell$ は x での場とその微分に依存する.) もちろん, 場が運動方程式を満たせば, (7.3.2) は場の全ての微小な変分について自動的に満たされている. しかし, 微小な対称変換というのは, 運動方程式を満たしていないときにも作用を不変に保つ変換の意味だ. 同じ変換で以下のように ϵ を時空座標の任意の関数とするものを考える.

$$\Psi^\ell(x) \to \Psi^\ell(x) + i\epsilon(x)\,\mathcal{F}^\ell(x)\,. \tag{7.3.3}$$

このとき一般に, 作用の変分はゼロではないが, $\epsilon(x)$ が「定数のとき」ゼロになるためには以下の形でなければならない.

$$\delta I = -\int d^4x\, J^\mu(x) \frac{\partial \epsilon(x)}{\partial x^\mu}. \tag{7.3.4}$$

ここで $I[\Psi]$ に現れる場が場の方程式を満たすようにとると, (7.3.3) の形の変分を含めて, 遠い時空点でゼロになる場の任意の変分に関して $I[\Psi]$ は停留し, よってこの場合 (7.3.4) はゼロにならねばならない. 部分積分すると, $J^\mu(x)$ は以下の保存則を満たさねばならないことがわかる.

$$0 = \frac{\partial J^\mu(x)}{\partial x^\mu}\,. \tag{7.3.5}$$

これから直ちに,

$$0 = \frac{dF}{dt} \tag{7.3.6}$$

が導かれる. ここで,

$$F \equiv \int d^3x\, J^0 \tag{7.3.7}$$

だ. 各々の独立な微小対称性変換について, このような 1 個の保存カレント J^μ と 1 個の運動の定数 F が存在する. これは正準形式の一般的な特徴を表し, しばしばネーター (Noether) の定理と呼ばれる. すなわち, 対称性は保存則を意味する.

多くの対称性変換は, 作用を不変にするだけでなく, ラグランジアンをも不変にする. これは例えば, 空間の並進や回転, アイソスピン変換や他の内部対称性変換の場合に当てはまるが, 一般のローレンツ変換については当てはまらない. ラグランジアンが不変な場合は, さらに進んで, 保存量 F の式を陽に書ける. 場の変分 (7.3.3) で $\epsilon(x)$ が t には依るが $\mathbf{x}$ には依らないものを考える. この場合, 作用の変分は以下のとおりだ.

$$\delta I = i\int dt \int d^3x \left[\frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x},t)} \epsilon(t) \mathcal{F}^\ell(\mathbf{x},t)\right.$$

$$+\frac{\delta L[\Psi(t),\dot{\Psi}(t)]}{\delta\dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x},t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon(t)\mathcal{F}^\ell(\mathbf{x},t)\right)\Bigg]\,. \tag{7.3.8}$$

ラグランジアンが定数の ϵ に対して不変だという要求より,

$$0=\int d^3x\,\left[\frac{\delta L[\Psi(t),\dot{\Psi}(t)]}{\delta\Psi^\ell(\mathbf{x},t)}\mathcal{F}^\ell(\mathbf{x},t)+\frac{\delta L[\Psi(t),\dot{\Psi}(t)]}{\delta\dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x},t)}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}^\ell(\mathbf{x},t)\right] \tag{7.3.9}$$

が得られ, よって一般の場に対して (それが場の方程式を満たすか否かによらず) 作用の変分は以下のようになる.

$$\delta I=i\int dt\,\int d^3x\,\frac{\delta L[\Psi(t),\dot{\Psi}(t)]}{\delta\dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x},t)}\,\dot{\epsilon}(t)\,\mathcal{F}^\ell(\mathbf{x},t). \tag{7.3.10}$$

これを (7.3.4) と比較すると以下を得る.

$$F=-i\int d^3x\frac{\delta L[\Psi(t),\dot{\Psi}(t)]}{\delta\dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x},t)}\mathcal{F}^\ell(\mathbf{x},t). \tag{7.3.11}$$

読者は, 対称性の条件 (7.3.9) を使って, 実際に運動方程式 (7.2.2) を満たす任意の場についてこの F が時間に依存しないことを容易に確かめることができる.

アイソスピン回転のような他の対称性変換は, 作用とラグランジアンばかりでなくラグランジアン密度も不変に保つ. そのような場合には, さらに進んで, カレント $J^\mu(x)$ の陽な式を書くことができる. 作用を (7.2.6) のようにラグランジアン密度の積分で書くと, (7.3.3) の変換で一般の微小パラメータ $\epsilon(x)$ を持つものに対する作用の変分は以下のとおりだ.

$$\delta I[\Psi]=i\int d^4x\,\left[\frac{\partial\mathcal{L}(\Psi(x),\partial_\mu\Psi(x))}{\partial\Psi^\ell(x)}\mathcal{F}^\ell(x)\epsilon(x)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\mathcal{L}(\Psi(x),\partial_\mu\Psi(x))}{\partial(\partial_\mu\Psi^\ell(x))}\partial_\mu\left(\mathcal{F}^\ell(x)\epsilon(x)\right)\right]\,. \tag{7.3.12}$$

定数の ϵ に対するラグランジアンの不変性より,

$$0=\frac{\partial\mathcal{L}(\Psi(x),\partial_\mu\Psi(x))}{\partial\Psi^\ell(x)}\mathcal{F}^\ell(x)+\frac{\partial\mathcal{L}(\Psi(x),\partial_\mu\Psi(x))}{\partial(\partial_\mu\Psi^\ell(x))}\partial_\mu\mathcal{F}^\ell(x) \tag{7.3.13}$$

が得られ, よって任意の場に対する作用の変分は以下のようになる.

$$\delta I[\Psi] = i \int d^4x \, \frac{\partial \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x))}{\partial(\partial_\mu \Psi^\ell(x))} \mathcal{F}^\ell(x) \partial_\mu \epsilon(x). \tag{7.3.14}$$

(7.3.4) と比較すると, 以下が得られる.

$$J^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \Psi^\ell / \partial x^\mu)} \mathcal{F}^\ell \, . \tag{7.3.15}$$

対称性の条件 (7.3.13) を用いると, 場がオイラー・ラグランジュ方程式 (7.2.9) を満たすとき, $\partial_\mu J^\mu$ はゼロになることを容易に直接見ることができる. また, カレント (7.3.15) の時間成分の積分は前に導いた値 (7.3.11) になる.

ここまでに述べてきたことはすべて, 古典的な場の理論ばかりでなく量子力学的な場の理論でも成り立つ. 保存量 F の量子論的性質が最もよく表れているのは, ラグランジアン (必ずしもラグランジアン密度ではない) の対称性のうちで, 正準場 $Q^n(\mathbf{x}, t)$ (つまりその時間微分がラグランジアンに表れる Ψ^ℓ) を同時刻のその正準場自身の $\mathbf{x}$ に依存する汎関数に変換するものだ. そのような変換は, 以下のように表せる.

$$\mathcal{F}^n(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}^n[Q(t); \mathbf{x}] \, . \tag{7.3.16}$$

後で見るように, 空間の微小な並進と回転, および全ての微小な内部対称性変換は (7.3.1), (7.3.16) の形をしていて, $\mathcal{F}^n$ が Q^m の線形汎関数になっているが, ここでは対称性が線形であることを仮定する必要はない. そのようなすべての対称性について, 演算子 F は単に保存するだけでなく, 量子力学ではこの対称性の**生成子** (generator) として作用する.

この事を見るにはまず, Ψ^ℓ が正準場 Q^n のとき, 汎関数微分 $\delta L/\delta \dot{\Psi}^\ell$ が正準共役量 P_n に等しく, 他方, Ψ^ℓ が補助場 C^r なら, この汎関数微

分はゼロになり, よって (7.3.11) は,

$$F = -i\int d^3x\, P_n(\mathbf{x},t)\mathcal{F}^n(\mathbf{x},t) = -i\int d^3x\, P_n(\mathbf{x},t)\,\mathcal{F}^n[Q(t),\mathbf{x}] \tag{7.3.17}$$

の形に書き換えられることに留意する. F と任意の時刻 t の正準場 $Q^m(\mathbf{x},t)$ との交換子 (または反交換子) を計算するには, (7.3.6) を援用して F を時刻 t での Q と P の汎関数として評価し, つぎに同時刻正準交換関係 (7.1.30)–(7.1.32) を使って以下を得る事ができる.*

$$[F\,,\,Q^n(\mathbf{x},t)]_- = -\,\mathcal{F}^n(\mathbf{x},t)\,. \tag{7.3.18}$$

この意味で, F は (7.3.16) の変換の生成子だ. また (7.3.17) と正準交換則より以下を得る.

$$[F\,,\,P_n(\mathbf{x},t)]_- = \int d^3y\, P_m(\mathbf{y},t)\,\frac{\delta\mathcal{F}^m(Q(t);\mathbf{y})}{\delta Q^n(\mathbf{x},t)}\,. \tag{7.3.19}$$

$\mathcal{F}^m$ が線形なら, (7.3.19) より P_n は Q^n に対して反傾的 (contragrediently) に変換する.

最初の例として, 時空間の並進の対称性変換を考察する.

$$\Psi^\ell(x) \to \Psi^\ell(x+\epsilon) = \Psi^\ell(x) + \epsilon^\mu\partial_\mu\Psi^\ell(x)\,. \tag{7.3.20}$$

これは (7.3.1) の形をしており 4 個の独立なパラメータ ϵ^μ と 4 個の対応する変換関数,

$$\mathcal{F}^\ell_\mu = -i\partial_\mu\Psi^\ell \tag{7.3.21}$$

を持つ. その結果, 通常まとめてエネルギー・運動量テンソル (energy–momentum tensor) $T^\mu{}_\nu$ と呼ばれる 4 個の独立な保存カレントが存在する.

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0. \tag{7.3.22}$$

---

*ここでは Q^n がボゾンかフェルミオンかに応じて, 変分 $\mathcal{F}^n$ もそれぞれボゾン的かフェルミオン的だと仮定しているので, F はボゾン的になる. 唯一の例外は超対称性として知られるある種の対称性だ. その場合は, F はフェルミオン的であり, また Q^n もフェルミオン的なら (7.3.18) は反交換子だ.

これらのカレントから, 並進「カレント」の時間成分の空間積分として, 時間に依存しない以下の量を導ける (正準共役な場の変数 $P_n(\mathbf{x},t)$ と混同しないように注意せよ).

$$P_\nu = \int d^3x\, T^0{}_\nu\,, \tag{7.3.23}$$

$$\frac{d}{dt}\,P_\nu = 0\,. \tag{7.3.24}$$

ラグランジアンは空間の並進のもとで不変なので, 上の一般的な結果に従って, P_ν の空間成分は

$$\mathbf{P} \equiv -\int d^3x\, P_n(\mathbf{x},t)\boldsymbol{\nabla} Q^n(\mathbf{x},t) \tag{7.3.25}$$

の形をとることが結論できる. 同時刻交換関係 (7.1.30)–(7.1.32) を用いて, この演算子と正準場および共役場との交換子も以下のようにわかる.

$$[\mathbf{P}\,,\,Q^n(\mathbf{x},t)]_- = i\boldsymbol{\nabla} Q^n(\mathbf{x},t)\,, \tag{7.3.26}$$

$$[\mathbf{P}\,,\,P_n(\mathbf{x},t)]_- = i\boldsymbol{\nabla} P_n(\mathbf{x},t)\,. \tag{7.3.27}$$

これより, $\mathbf{x}$ に陽には依存しない Q と P の任意の関数 $\mathcal{G}$ について,

$$\Big[\mathbf{P},\ \mathcal{G}(x)\Big] = i\boldsymbol{\nabla}\mathcal{G}(x) \tag{7.3.28}$$

が導かれる. これらの結果は, 演算子 $\mathbf{P}$ が確かに空間の並進の生成子であることを表している.

対照的に, 時間の並進はラグランジアン $L(t)$ を不変に保たない. しかし, 時間並進の生成子はすでに知っている. それはハミルトニアン $P^0 \equiv H$ であり, 既知のように, ハイゼンベルグ表示の演算子の任意の関数 $\mathcal{G}$ について以下の交換関係を満たす.

$$[H\,,\,\mathcal{G}(\mathbf{x},t)] = -i\dot{\mathcal{G}}(\mathbf{x},t). \tag{7.3.29}$$

さらにラグランジアンがラグランジアン密度の積分であると仮定すると, エネルギー・運動量テンソル $T^\mu{}_\nu$ の陽な式も得ることができる. しかし, ラグランジアン密度 $\mathcal{L}(x)$ は時空間の並進のもとで不変ではないので, ここでは (7.3.15) は使えない. その代わりに, 時空間に依存する並進,

$$\Psi^\ell(x) \to \Psi^\ell(x + \epsilon(x)) = \Psi^\ell(x) + \epsilon^\mu(x)\partial_\mu \Psi^\ell(x) \tag{7.3.30}$$

のもとでの作用の変化は以下のようになることに留意する.

$$\delta I[\Psi] = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^\ell} \epsilon^\mu \partial_\mu \Psi^\ell + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \Psi^\ell)} \partial_\nu [\epsilon^\mu \partial_\mu \Psi^\ell] \right) . \tag{7.3.31}$$

オイラー・ラグランジュ方程式 (7.2.9) より, ϵ に比例する項はまとめて $\epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}$ となり, よって以下を得る.

$$\delta I[\Psi] = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \epsilon^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \Psi^\ell)} \partial_\mu \Psi^\ell \partial_\nu \epsilon^\mu \right) . \tag{7.3.32}$$

部分積分すると, これは (7.3.4) の形,

$$\delta I = -\int d^4x \, T^\nu{}_\mu \partial_\nu \epsilon^\mu \tag{7.3.33}$$

をとり, 「カレント」は

$$T^\nu{}_\mu = \delta^\nu_\mu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \Psi^\ell)} \partial_\mu \Psi^\ell \tag{7.3.34}$$

となることがわかる. 念のため見てみると, (7.3.23) の空間成分は $\mathbf{P}$ についての前の式 (7.3.25) と同じであり, 一方 $\mu = 0$ については (7.3.23) はハミルトニアンの通常の式,

$$H \equiv -P_0 = \int d^3x \left[\sum_n P_n \dot{Q}^n - \mathcal{L} \right] \tag{7.3.35}$$

を与える. (注意：(7.3.34) の 2 番目の添字を上げて得られるテンソル $T^{\mu\nu}$ は一般に対称ではないので, 一般相対論の場の方程式の右辺とし

て用いることはできない．重力場の源として使うべき正しいエネルギー・運動量テンソルは次の節で導入する対称テンソル $\Theta^{\mu\nu}$ だ．)

多くの理論ではまた, 座標に依存しない正準場の一組の線形変換,

$$Q^n(x) \to Q^n(x) + i\,\epsilon^a\,(t_a)^n{}_m Q^m(x) \tag{7.3.36}$$

と補助場 C^r の一組の適切な変換,

$$C^r(x) \to C^r(x) + i\,\epsilon^a\,(\tau_a)^r{}_s C^s(x) \tag{7.3.37}$$

のもとで作用が不変になる一つ以上の対称性の原理が存在する．ここで, t_a と τ_a はエルミート行列の組で, 対称性の群のリー代数のある表現になっており, a, b 等の繰り返された群の添字については和をとる．(例えば, 電磁理論にはそのような対称性があり, 単一の行列 $t^n{}_m$ は対角的で, 主対角要素は各場が持つ電荷だ.) 任意のそのような対称性から, 他の保存カレントの組 J^μ_a の存在を推論できる．

$$\partial_\mu J^\mu_a = 0\,. \tag{7.3.38}$$

このカレントの時間成分は, 時間に依存しない演算子の組,

$$T_a = \int d^3x\, J^0_a \tag{7.3.39}$$

の密度だ．変換 (7.3.36) のもとで作用だけでなくラグランジアンも不変なら, (7.3.11) より T_a の陽な式は以下のようになる．

$$T_a = -i \int d^3x\, P_n(\mathbf{x},t)(t_a)^n{}_m Q^m(\mathbf{x},t)\,. \tag{7.3.40}$$

同時刻交換関係より以下を得る．

$$\Big[T_a\,,\, Q^n(x)\Big] = -(t_a)^n{}_m Q^m(x), \tag{7.3.41}$$

$$\Big[T_a\,,\, P_n(x)\Big] = +(t_a)^m{}_n P_m(x)\,. \tag{7.3.42}$$

(この式より, t_a が対角的なら, Q^n と P_n は T_a の値を t_a の n 番目の対角要素の分だけそれぞれ上げ下げすることがわかる.) これらの結果を用いて, T_a と他の生成子 T_b との交換子を以下のように計算できる.

$$[T_a\,,\,T_b]_- = i\int d^3x\ \Big[-\,P_m\,(t_a)^m{}_n\,(t_b)^n{}_k\,Q^k \\ +\,P_n\,(t_b)^n{}_k(t_a)^k{}_mQ^m\Big]\ . \qquad (7.3.43)$$

すると, 行列 t_a が,

$$[t_a\,,\,t_b]_- = if_{ab}{}^c t_c \qquad (7.3.44)$$

というように構造定数 $f_{ab}{}^c$ を持つリー代数を構成するなら, 量子演算子 T_a も同じリー代数を構成する.

$$[T_a\,,\,T_b]_- = i\,f_{ab}{}^c\,T_c\ . \qquad (7.3.45)$$

このことより, (7.3.40) は正しく規格化されており, 対称性の群の生成子としての資格があることが確認できる.

ラグランジアンが, (7.3.36) と (7.3.37) のもとで不変なラグランジアン密度の積分のとき, さらに進んで, (7.3.15) を用いてこれらの大域的対称性にともなうカレントの陽な式を以下のように得ることができる.

$$J^\mu_a \equiv -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial Q^n/\partial x^\mu)}\,(t_a)^n{}_mQ^m - i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial C^r/\partial x^\mu)}\,(\tau_a)^r{}_sC^s\ . \qquad (7.3.46)$$

例として, 質量が等しい二つの実スカラー場で, 以下のラグランジアンを持つものを考える.

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\,\partial_\mu\Phi_1\partial^\mu\Phi_1 - \tfrac{1}{2}m^2\Phi_1^2 - \tfrac{1}{2}\,\partial_\mu\Phi_2\partial^\mu\Phi_2 - \tfrac{1}{2}\,m^2\Phi_2^2 - \mathcal{H}(\Phi_1^2+\Phi_2^2)\ . \qquad (7.3.47)$$

これは (7.3.36) のような線型変換,

$$\delta\Phi_1 = -\epsilon\Phi_2\ , \qquad \delta\Phi_2 = +\epsilon\Phi_1$$

のもとで不変なので, 保存カレント (7.3.46) が以下のように存在する.

$$J^{\mu} = \Phi_2 \partial^{\mu} \Phi_1 - \Phi_1 \partial^{\mu} \Phi_2 \ .$$

カレントについての陽な式 (7.3.46) を使うと, 他の有用な交換関係を導くことができる. 特に, ラグランジアン密度は補助場の時間微分を含まないので, 以下を得る.

$$J_a^0 = -iP_n (t_a)^n{}_m Q^m \ . \tag{7.3.48}$$

すると, 一般の場と, 対称性の生成子 T_a だけでなく密度 J_a^0 との同時刻交換関係を以下のように導ける.

$$[J_a^0(\mathbf{x},t)\,,\, Q^n(\mathbf{y},t)] = -\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,(t_a)^n{}_m Q^m(\mathbf{x},t)\ , \tag{7.3.49}$$

$$[J_a^0(\mathbf{x},t)\,,\, P_m(\mathbf{y},t)] = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,(t_a)^n{}_m P_n(\mathbf{x},t)\ . \tag{7.3.50}$$

もし, 補助場が, P と Q の局所関数として, 生成子 τ_a を持つ対称性の代数の表現に従って変換するように構成されていれば, 以下のようになる.

$$[J_a^0(\mathbf{x},t), C^r(\mathbf{y},t)] = -\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,(\tau_a)^r{}_s C^s(\mathbf{x},t)\ . \tag{7.3.51}$$

(7.3.49) と (7.3.51) は, しばしばまとめて一つの交換関係,

$$[J_a^0(\mathbf{x},t)\,,\, \Psi^{\ell}(\mathbf{y},t)] = -\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,(t_a)^{\ell}{}_{\ell'} \Psi^{\ell'}(\mathbf{x},t) \tag{7.3.52}$$

で表される. (7.3.49)–(7.3.51) のような交換関係は, 10 章で, カレント J^{μ} を含む行列要素についてのワォードの恒等式と呼ばれる関係を導くのに使う.

7.4 ローレンツ不変性

この節では, ラグランジアン密度のローレンツ不変性は S 行列のローレンツ不変性を意味することを示そう. 以下の微小ローレンツ変

換を考える.

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \,, \tag{7.4.1}$$

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \,. \tag{7.4.2}$$

前節の解析によれば, そのような変換のもとでの作用の不変性からただちに保存「カレント」$\mathcal{M}^{\rho\mu\nu}$ の存在が導かれる.

$$\partial_\rho \mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = 0 \tag{7.4.3}$$

$$\mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = -\mathcal{M}^{\rho\nu\mu} \tag{7.4.4}$$

ここで, $\omega_{\mu\nu}$ の独立な各成分ごとに 1 個のカレントが対応する. これらの「カレント」の時間成分の積分より, 時間に依存しないテンソルの組を得る.

$$J^{\mu\nu} \equiv \int d^3x \; \mathcal{M}^{0\mu\nu} \,, \tag{7.4.5}$$

$$\frac{d}{dt} J^{\mu\nu} = 0 \,. \tag{7.4.6}$$

この $J^{\mu\nu}$ は斉次ローレンツ群の生成子であることが以下でわかる.

テンソル $\mathcal{M}^{\rho\mu\nu}$ の陽な式を得たいが, ローレンツ変換は座標に作用するのでラグランジアン密度を不変に保つことはできず, 前節の結果を直接使うことはできない. しかし, 並進不変性を使えば, ローレンツ不変性を場とその微分のみの変換のもとでのラグランジアン密度の対称性として定式化できる. 場は以下の行列変換を受ける.

$$\delta\Psi^\ell = \frac{i}{2}\,\omega^{\mu\nu}(\mathcal{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m \Psi^m \,. \tag{7.4.7}$$

ここで, $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ は斉次ローレンツ群の以下の代数を満たす行列の組だ.

$$[\mathcal{J}_{\mu\nu},\ \mathcal{J}_{\rho\sigma}] = i\mathcal{J}_{\rho\nu}\eta_{\mu\sigma} - i\mathcal{J}_{\sigma\nu}\eta_{\mu\rho} - i\,\mathcal{J}_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} + i\,\mathcal{J}_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} \,. \tag{7.4.8}$$

例えば, スカラー場 ϕ の場合, $\delta\phi = 0$ なので, $\mathcal{J}_{\mu\nu} = 0$ だが, (A, B) の型の既約場の場合は,

$$\mathcal{J}_{ij} = \epsilon_{ijk}(\mathcal{A}_k + \mathcal{B}_k)\ , \qquad \mathcal{J}_{k0} = -i(\mathcal{A}_k - \mathcal{B}_k)$$

だ. ここで, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ と $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ はそれぞれスピン A と B のスピン行列だ. 特に共変ベクトル場については, $\delta V_\kappa = \omega_\kappa{}^\lambda V_\lambda$ なので,

$$(\mathcal{J}_{\rho\sigma})_\kappa{}^\lambda = -i\eta_{\rho\kappa}\delta_\sigma{}^\lambda + i\,\eta_{\sigma\kappa}\delta_\rho{}^\lambda$$

となる. (7.4.7) のように変換する場の微分は, 余分なベクトルの指標をもつ別のそのような場のように変換する.

$$\delta(\partial_\kappa\Psi_\ell) = \tfrac{1}{2}\,i\,\omega^{\mu\nu}(\mathcal{J}_{\mu\nu})_\ell{}^m\partial_\kappa\Psi_m + \omega_\kappa{}^\lambda\partial_\lambda\Psi_\ell\ . \tag{7.4.9}$$

ラグランジアン密度は (7.4.7) と (7.4.9) の変換の組み合わせのもとで不変だと仮定すると, 以下のようになる.

$$0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^\ell}\,\frac{i}{2}\,\omega^{\mu\nu}(\mathcal{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\Psi^m + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^\ell)}\,\frac{i}{2}\,\omega^{\mu\nu}(\mathcal{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\partial_\kappa\Psi^m + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^\ell)}\,\omega_\kappa{}^\lambda\partial_\lambda\Psi^\ell\ .$$

$\omega^{\mu\nu}$ の係数をゼロに置くと以下を得る.

$$0 = \frac{i}{2}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^\ell}\,(\mathcal{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\Psi^m + \frac{i}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^\ell)}\,(\mathcal{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\partial_\kappa\Psi^m + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^\ell)}\,(\eta_{\kappa\mu}\partial_\nu - \eta_{\kappa\nu}\partial_\mu)\Psi^\ell\ .$$

オイラー・ラグランジュ方程式 (7.2.9) と先に定義したエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ の式 (7.3.34) を使うと, これは以下のように書ける.

$$0 = \partial_\kappa\left[\frac{i}{2}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^\ell)}\,(\mathcal{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\Psi^m\right] - \frac{1}{2}\,(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})\ . \tag{7.4.10}$$

これよりただちに新しいエネルギー・運動量テンソルの定義が示唆される. それはベリンファンテ・テンソル (Belinfante tensor)[2]と呼ばれる以下のテンソルだ.

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - \frac{i}{2}\,\partial_\kappa \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa \Psi^\ell)} \,(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\ell{}_m \Psi^m \right. \\ \left. - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi^\ell)} \,(\mathcal{J}^{\kappa\nu})^\ell{}_m \Psi^m - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \Psi^\ell)} \,(\mathcal{J}^{\kappa\mu})^\ell{}_m \Psi^m \right] . \quad (7.4.11)$$

角括弧内の量は μ と κ について明白に反対称なので, $\Theta^{\mu\nu}$ は $T^{\mu\nu}$ と同じ保存則を満たす.

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 . \quad (7.4.12)$$

同じ理由で, (7.4.11) で $\mu = 0$ とおくと指標 κ は空間成分のみを動くので, 微分項は全空間について積分すると落ちて, 以下を得る.

$$\int \Theta^{0\nu} d^3x = \int T^{0\nu} d^3x = P^\nu . \quad (7.4.13)$$

ここで $P^0 \equiv H$ だ. このように, $\Theta^{\mu\nu}$ は, ちょうど $T^{\mu\nu}$ と同様に, まさにエネルギー・運動量テンソルと見なせる. しかし, (7.4.10) からわかるように, $T^{\mu\nu}$ と異なり, ベリンファンテ・テンソル $\Theta^{\mu\nu}$ は保存するだけでなく対称だ.

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu} . \quad (7.4.14)$$

重力場の源として作用するのは $T^{\mu\nu}$ ではなくむしろ $\Theta^{\mu\nu}$ だ.[3] $\Theta^{\mu\nu}$ が対称である結果, 以下のもう一つの保存テンソル密度を構成できる.

$$\mathcal{M}^{\lambda\mu\nu} \equiv x^\mu \Theta^{\lambda\nu} - x^\nu \Theta^{\lambda\mu} . \quad (7.4.15)$$

この量は以下の意味で保存する.

$$\partial_\lambda \mathcal{M}^{\lambda\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu} = 0 . \quad (7.4.16)$$

このようにローレンツ不変性から，もう一つの時間に依存しないテンソルを以下のように定義できる.

$$J^{\mu\nu} = \int \mathcal{M}^{0\mu\nu} d^3x = \int d^3x (x^\mu \Theta^{0\nu} - x^\nu \Theta^{0\mu}) \,. \tag{7.4.17}$$

回転の生成子 $J_k = \epsilon_{ijk} J^{ij}/2$ は，時間に依存しないだけでなく，時刻 t を陽に含まないので，ハミルトニアンと交換する.

$$[H, \mathbf{J}] = 0 \,. \tag{7.4.18}$$

また，(7.3.28) を関数 $\Theta^{0\nu}$ に適用すると，

$$[P_j, J_k] = \frac{1}{2}\,\epsilon_{i\ell k}[P_j, J^{\ell k}] = \frac{i}{2}\,\epsilon_{i\ell k} \int d^3x \left(x^\ell \frac{\partial}{\partial x^j}\,\Theta^{0k} - x^k \frac{\partial}{\partial x^j}\,\Theta^{0\ell} \right)$$
$$= -i\,\epsilon_{ijk} \int d^3x\, \Theta^{0k}$$

が得られ，よって，

$$[P_j, J_i] = -i\,\epsilon_{ijk}\, P_k \tag{7.4.19}$$

となる．他方，「ブースト」の生成子 $K_k \equiv J^{k0}$ は時間に依存しないが，以下のように時間座標を陽に含む.

$$K_k = \int d^3x (x^k \Theta^{00} - x^0 \Theta^{0k}) \,.$$

あるいはもっと陽に書けば，

$$\mathbf{K} = -t\mathbf{P} + \int d^3x\, \mathbf{x}\, \Theta^{00}(\mathbf{x}, t) \tag{7.4.20}$$

となる．これは定数なので，$0 = \dot{\mathbf{K}} = -\mathbf{P} + i[H, \mathbf{K}]$ となり，よって以下を得る.

$$[H, \mathbf{K}] = -i\,\mathbf{P} \,. \tag{7.4.21}$$

また，(7.3.28) をもう一度適用すると，

$$[P_j, K_k] = i \int d^3x\, x^k \frac{\partial}{\partial x^j}\, \Theta^{00} = -i\delta_{jk} \int d^3x\, \Theta^{00}$$

が得られ, よって以下のようになる.

$$[P_j, K_k] = -i\,\delta_{jk}\,H\ . \tag{7.4.22}$$

任意の妥当なラグランジアン密度をとれば, 演算子 (7.4.20) は 3.3 節で用いた意味で「滑らか」であろう. すなわち, $e^{iH_0t}\int d^3x\ \mathbf{x}\,\Theta^{00}(\mathbf{x},0)\,e^{-iH_0t}$ の相互作用項は $t\to\pm\infty$ でゼロになる.* (「in」状態,「out」状態, および S 行列の導入を可能にするには, $e^{iH_0t}\int d^3x\ \Theta^{00}(\mathbf{x},0)e^{-iH_0t}$ の相互作用項は $t\to\pm\infty$ でゼロにならなければならない.) この滑らかさの仮定と交換関係 (7.4.21) があれば, 3.3 節の議論を繰り返して, S 行列はローレンツ不変であると結論できる.

* * *

3.3 節で同じ議論を用いて, ローレンツ群の残りの交換関係, つまり $J^{\mu\nu}$ 同士の交換関係が本来の形になることを証明した. これも, 回転の生成子の交換子については直接示すことができる. その回転の生成子はここでは以下の形をしている.

$$J^{ij} = \int d^3x\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Psi}^\ell}\left(x^i\partial_j\Psi^\ell - x^j\partial_i\Psi^\ell - i\left(\mathcal{J}^{ij}\right)^\ell{}_m\Psi^m\right)\ . \tag{7.4.23}$$

ラグランジアン密度は補助場の時間微分には依存せず, また回転の生成子は正準場と補助場を混ぜないので, これは正準場だけの和で書ける.

$$J^{ij} = \int d^3x\ P_n\left(x^i\partial_jQ^n - x^j\partial_iQ^n - i\left(\mathcal{J}^{ij}\right)^n{}_{n'}Q^{n'}\right)\ . \tag{7.4.24}$$

すると, 正準交換関係から以下がただちに導かれる.

$$[J^{ij}, Q^n(x)]_- = -i(x_i\partial_j - x_j\partial_i)Q^n(x) - (\mathcal{J}^{ij})^n{}_{n'}Q^{n'}(x)\ , \tag{7.4.25}$$

$$[J^{ij}, P_n(x)]_- = -i(x_i\partial_j - x_j\partial_i)P^n(x) + (\mathcal{J}^{ij})^{n'}{}_nP_{n'}(x)\ . \tag{7.4.26}$$

---

*ある相互作用表示の演算子が $t\to\pm\infty$ でゼロになるとは, エネルギー固有状態の滑らかな重ね合わせ状態間の行列要素がこの極限でゼロになるという意味だ.

これらの結果を使うと, J^{ij} 同士および J^{ij} と他の生成子との通常の交換関係が導ける.** もし補助場が存在しなければ, 同じ議論を「ブースト」生成子に適用して, P^μ と $J^{\mu\nu}$ が非斉次ローレンツ群の交換関係を満たすことを示せる. しかし「ブースト」行列 $\mathcal{J}^{i0}$ は一般に正準場と補助場 (例えばベクトル場の成分 V^i と V^0) を混ぜるので, J^{i0} 同士の交換関係の直接の証明は個別の事情を考慮して行わねばならない. 幸い, このことは 3.3 節での S 行列のローレンツ不変性の証明には不要だった.

7.5 相互作用表示への移行：例

7.2 節の終わりに, 簡単なスカラー場理論のラグランジアンを使って, 相互作用とそれに含まれる相互作用表示での自由場の構造とを導く方法を示した. 今度はもう少し複雑で意義深い例を示そう.

微分結合のスカラー場

最初に中性スカラー場を考えよう. ただし, 今度は微分結合を持つとする. そのラグランジアンを以下のようにとる.

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\ \partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \tfrac{1}{2}\ m^2\,\Phi^2 - J^\mu\partial_\mu\Phi - \mathcal{H}(\Phi)\,. \tag{7.5.1}$$

ここで J^μ は c 数の外部カレント (以前に導入したカレント J^μ とは無関係) か, または Φ 以外の様々な場の汎関数 (この場合, これら他の場を含む項を (7.5.1) に加える必要がある) だ. Φ の正準共役量は今度は,

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}} = \dot{\Phi} - J^0 \tag{7.5.2}$$

** また, J^{ij} は H および $P_n\dot{Q}^n$ と交換するので, L とも交換する. よって, J^{ij} と補助場との交換子は L の回転不変性と整合していなければならない.

で, ハミルトニアンは, 以下のとおりだ.

$$
\begin{aligned}
H &= \int d^3x[\Pi\dot{\Phi} - \mathcal{L}] \\
&= \int d^3x\Big[\Pi(\Pi + J^0) + \tfrac{1}{2}\,(\nabla\Phi)^2 - \tfrac{1}{2}\,(\Pi + J^0)^2 \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\,m^2\,\Phi^2 + \mathbf{J}\cdot\nabla\Phi + J^0(\Pi + J^0) + \mathcal{H}(\Phi)\Big]
\end{aligned}
$$

項を整理すると, これは次のように書ける.

$$H = H_0 + V, \tag{7.5.3}$$

$$H_0 = \int d^3x\Big[\tfrac{1}{2}\,\Pi^2 + \tfrac{1}{2}\,(\nabla\Phi)^2 + \tfrac{1}{2}\,m^2\Phi^2\Big]\,, \tag{7.5.4}$$

$$V = \int d^3x\Big[\Pi J^0 + \mathbf{J}\cdot\nabla\Phi + \tfrac{1}{2}\,(J^0)^2 + \mathcal{H}(\Phi)\Big]\,. \tag{7.5.5}$$

7.2 節で説明したように, 相互作用表示に移行するには以下のように単に Π と Φ を π と ϕ で置き換えればよい. (カレント J^μ の任意の場についても同様の置き換えをする必要があるが, わざわざこれを陽に示すことはしない.)

$$H_0 = \int d^3x\left[\tfrac{1}{2}\;\pi^2(\mathbf{x},t) + \tfrac{1}{2}\,\Big(\nabla\phi(\mathbf{x},t)\Big)^2 + \tfrac{1}{2}\,m^2\phi^2(\mathbf{x},t)\right] \tag{7.5.6}$$

$$
\begin{aligned}
V(t) = \int d^3x\Big[&\pi(\mathbf{x},t)J^0(\mathbf{x},t) + \mathbf{J}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\phi(\mathbf{x},t) \\
&+ \tfrac{1}{2}\,\Big[J^0(\mathbf{x},t)\Big]^2 + \mathcal{H}(\phi(\mathbf{x},t))\Big]\,.
\end{aligned} \tag{7.5.7}
$$

自由粒子ハミルトニアンはちょうど (7.2.25) と同じで, 7.2 節と同様に (7.2.26)–(7.2.35) を導く. 実際, 全ハミルトニアンの形に関わらず, (7.5.6) を分離して自由粒子部分と呼び, 残りの部分を相互作用部分と呼ばねばならない. なぜなら, すでに見たように, 交換関係 (7.2.34), (7.2.35) を満たす生成・消滅演算子についてのスカラー場の正しい展

開 (7.2.29) を導くのは, この形の自由粒子ハミルトニアンだからだ. 最後に, 相互作用ハミルトニアンの π を相互作用表示での値 $\dot{\phi}$ (ハイゼンベルグ表示での値 $\dot{\phi} - J^0$ ではない) に置き換える.

$$V(t) = \int d^3x \left[J^\mu(\mathbf{x},t)\partial_\mu\phi(\mathbf{x},t) + \frac{1}{2}\left[J^0(\mathbf{x},t)\right]^2 + \mathcal{H}(\phi(\mathbf{x},t)\right] . \tag{7.5.8}$$

(7.5.8) の余分な不変でない項は, ちょうど 6.2 節で見た項で, $\partial\phi$ のプロパゲーターの不変でない項を相殺するのに必要だ.

スピン 1 のベクトル場

同様の結果はスピン 1 粒子のベクトル場 V_μ の正準量子化においても得られる. ここでは先入観を持たずに, ラグランジアン密度をかなり一般的な形にとろう.

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\,\alpha\,\partial_\mu V_\nu\,\partial^\mu V^\nu - \tfrac{1}{2}\,\beta\,\partial_\mu V_\nu\,\partial^\nu V^\mu - \tfrac{1}{2}\,m^2\,V_\mu V^\mu + J_\mu V^\mu\;. \tag{7.5.9}$$

ここで, α, β と m^2 は今のところ任意の定数で, J_μ は c 数の外部カレントか, または V^μ 以外の場に依存する演算子だ. 後者の場合, これらの場を含む項を $\mathcal{L}$ に付け加えなければならない. V_μ に関するオイラー・ラグランジュの場の方程式は次のとおりだ.

$$-\alpha\Box V_\mu - \beta\,\partial_\mu(\partial_\nu V^\nu) + m^2 V_\mu = J_\mu\;.$$

微分して以下を得る.

$$-(\alpha+\beta)\Box\partial_\lambda V^\lambda + m^2\partial_\lambda V^\lambda = \partial_\lambda J^\lambda\;. \tag{7.5.10}$$

これは質量 $m^2/(\alpha+\beta)$ と外場 $\partial_\lambda J^\lambda/(\alpha+\beta)$ を持つ通常のスカラー場の方程式だ. スピン 1 粒子のみを含みスピンゼロ粒子は含まない理論を記述したいので, $\partial_\lambda V^\lambda$ が独立な伝搬するスカラー場として現れるのを避けるために, $\alpha = -\beta$ ととる. この場合 $\partial_\lambda V^\lambda$ は, 外部カレン

トまたは他の場で $\partial_\lambda J^\lambda/m^2$ と表せる. 定数 α は V_μ の定義に吸収できるので, $\alpha = -\beta = 1$ ととることができ, よって, 以下が得られる.

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}\ F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, m^2\, V_\mu V^\mu + J_\mu V^\mu\ . \tag{7.5.11}$$

ここで, $F_{\mu\nu}$ は次のとおりだ.

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu\ . \tag{7.5.12}$$

ラグランジアンをベクトル場の時間微分で微分すると,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{V}_\mu} = -F^{0\mu} \tag{7.5.13}$$

となる. これは μ が空間の添字 i のときゼロでない. よって, V^i は正準場で, 共役場は以下のとおりだ.

$$\Pi^i = F^{i0} = \dot{V}^i + \partial_i V^0\ . \tag{7.5.14}$$

一方, $F^{00} = 0$ なので, $\dot{V}^0$ はラグランジアンに現れず, よって, V^0 は補助場だ. これは深刻な問題にはならない. $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{V}^0$ がゼロだという事実は, V^0 についての場の方程式が時間の 2 回微分を含まないことを意味し, 場の変数を取り除く拘束条件として使える. 実際, $\mu = 0$ の場合のオイラー・ラグランジュ方程式は,

$$\partial_i\, F^{i0} = m^2\, V^0 - J^0 \tag{7.5.15}$$

あるいは, (7.5.14) を用いて,

$$V^0 = \frac{1}{m^2}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi} + J^0) \tag{7.5.16}$$

となる.

さてこの理論のハミルトニアン $H = \int d^3x\,(\mathbf{\Pi}\cdot\dot{\mathbf{V}} - \mathcal{L})$ を計算しよう. (7.5.14) より $\dot{\mathbf{V}}$ を $\mathbf{\Pi}$ と J^0 を用いて,

$$\dot{\mathbf{V}} = -\boldsymbol{\nabla}V^0 + \mathbf{\Pi}\ =\ \mathbf{\Pi} - \frac{1}{m^2}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{\Pi} + J^0)$$

と書くことが可能なので, 以下を得る.

$$
\begin{aligned}
H = \int d^3x \Big[& \mathbf{\Pi}^2 + m^{-2}(\nabla\cdot\mathbf{\Pi})(\nabla\cdot\mathbf{\Pi} + J^0) \\
& -\tfrac{1}{2}\,\mathbf{\Pi}^2 + \tfrac{1}{2}\,(\nabla\times\mathbf{V})^2 + \tfrac{1}{2}\,m^2\,\mathbf{V}^2 \\
& -\tfrac{1}{2}\,m^{-2}(\nabla\cdot\mathbf{\Pi} + J^0)^2 - \mathbf{J}\cdot\mathbf{V} + m^{-2}J^0(\nabla\cdot\mathbf{\Pi} + J^0)\Big] .
\end{aligned}
$$

ここでも, これを,

$$
H = H_0 + V \ , \tag{7.5.17}
$$

と自由粒子項 H_0 と相互作用 V に分ける. さらに, 相互作用表示へ移行するするために, ハイゼンベルグ表示の量 $\mathbf{V}$ と $\mathbf{\Pi}$ を以下のようにそれらの相互作用表示での対応物 $\mathbf{v}$ と π に置き換える. (陽に示していないが, J^μ に現れるすべての場と共役場についても同様の置き換えをする.)

$$
H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2 + \frac{1}{2m^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{v})^2 + \frac{m^2}{2}\mathbf{v}^2 \right] \ , \tag{7.5.18}
$$

$$
V = \int d^3x \left[-\mathbf{J}\cdot\mathbf{v} + m^{-2}J^0\nabla\cdot\boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2m^2}(J^0)^2 \right] . \tag{7.5.19}
$$

すると, $\boldsymbol{\pi}$ と $\mathbf{v}$ の関係は,

$$
\dot{\mathbf{v}} = \frac{\delta H_0(\mathbf{v},\boldsymbol{\pi})}{\delta\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\pi} - m^{-2}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}) \tag{7.5.20}
$$

で,「場の方程式」は,

$$
\dot{\boldsymbol{\pi}} = -\frac{\delta H_0(\mathbf{v},\boldsymbol{\pi})}{\delta\mathbf{v}} = +\nabla^2\mathbf{v} - \nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) - m^2\mathbf{v} \tag{7.5.21}
$$

となる. V^0 は独立な場ではないので, どのような相互作用表示の量 v^0 とも相似変換でつながっていない. 代わりに, 以下の量を考案することができる.

$$
v^0 \equiv m^{-2}\nabla\cdot\boldsymbol{\pi} \ . \tag{7.5.22}
$$

すると, (7.5.20) より $\boldsymbol{\pi}$ を以下のように書くことが許される.

$$\boldsymbol{\pi} = \dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\nabla} v^0 \, . \tag{7.5.23}$$

これを (7.5.22) と (7.5.21) に代入すれば, 場の方程式は以下の形となる.

$$\nabla^2 v^0 + \boldsymbol{\nabla} \cdot \dot{\mathbf{v}} - m^2 v^0 = 0 \, ,$$
$$\nabla^2 \mathbf{v} - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}) - \ddot{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\nabla} \dot{v}^0 - m^2 \mathbf{v} = 0 \, .$$

これらは共変な形,

$$\Box \, v^\mu - \partial^\mu \partial_\nu v^\nu - m^2 v^\mu = 0 \tag{7.5.24}$$

にまとめることができる. 微分をとると,

$$\partial_\mu v^\mu = 0 \tag{7.5.25}$$

が得られ, よって以下のとおりになる.

$$(\Box - m^2) \, v^\mu = 0 \, . \tag{7.5.26}$$

(7.5.25) と (7.5.26) を満たす実ベクトル場は以下のフーリエ変換で表せる.

$$v^\mu(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_\sigma \int d^3 p \, (2p^0)^{-1/2} \Big\{ e^\mu(\mathbf{p},\sigma) a(\mathbf{p},\sigma) e^{ip\cdot x} + e^{\mu *}(\mathbf{p},\sigma) a^\dagger(\mathbf{p},\sigma) \, e^{-ip\cdot x} \Big\} \, . \tag{7.5.27}$$

ここで, $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^{\,2} + m^2}$ だ. また, $e^\mu(\mathbf{p},\sigma)$ $(\sigma = +1, 0, -1)$ は,

$$p_\mu e^\mu(\mathbf{p},\sigma) = 0 \tag{7.5.28}$$

を満たす 3 個の独立なベクトルで,

$$\sum_\sigma e^\mu(\mathbf{p},\sigma) e^{\nu *}(\mathbf{p},\sigma) = \eta^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu / m^2 \tag{7.5.29}$$

と規格化され, $a(\mathbf{p},\sigma)$ は係数演算子だ. (7.5.23), (7.5.27), (7.5.29) を用いて $\mathbf{v}$ と $\boldsymbol{\pi}$ が正しい交換関係,

$$\left[v^i(\mathbf{x},t),\, \pi^j(\mathbf{y},t)\right] = i\,\delta_{ij}\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,,$$
$$\left[v^i(\mathbf{x},t),\, v^j(\mathbf{x},t)\right] = \left[\pi^i(\mathbf{x},t),\, \pi^j(\mathbf{x},t)\right] = 0 \qquad (7.5.30)$$

を満たすことを計算するのは簡単だ. ただし, $a(\mathbf{p},\sigma)$ と $a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)$ は以下の交換関係を満たすとする.

$$\left[a(\mathbf{p},\sigma),\, a^\dagger(\mathbf{p}',\sigma')\right] = \delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\delta_{\sigma'\sigma}\,, \qquad (7.5.31)$$

$$\left[a(\mathbf{p},\sigma),\, a(\mathbf{p}',\sigma')\right] = 0\,. \qquad (7.5.32)$$

スピン 1 粒子のベクトル場は (7.5.27) の形を取らねばならないことを我々はすでに知っているので, これらの結果を導けたことから, (7.5.18) が質量がゼロでないスピン 1 粒子の正しい自由粒子ハミルトニアンであることが証明されたことになる. また, (7.5.18) が (定数項を除いて) 自由粒子の標準的な形 $\sum_\sigma \int d^3p\; p^0\, a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)a(\mathbf{p},\sigma)$ に書けることは容易に確認できる. 最後に, (7.5.19) に (7.5.22) を使うと, 相互作用表示での相互作用は,

$$V(t) = \int d^3x \left[-J_\mu v^\mu \;+\; \frac{1}{2m^2}\,(J^0)^2\right] \qquad (7.5.33)$$

となる. (7.5.33) の余分な不変でない項はちょうど, 6 章で見た項で, それはベクトル場のプロパゲーターの不変でない項を相殺するために必要であった.

スピン 1/2 のディラック場

スピン 1/2 粒子のディラック場については, とりあえずラグランジアンを以下のように取る.

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Psi - \mathcal{H}(\bar{\Psi},\Psi). \qquad (7.5.34)$$

ここで $\mathcal{H}$ は $\bar{\Psi}$ と Ψ の実関数だ. これは実ではないが, 作用は実だ. なぜなら,

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - (\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi)^\dagger = \bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + (\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu\Psi = \partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)$$

だからだ. よって, 作用が $\bar{\Psi}$ に関して停留する条件から得られる場の方程式は, 作用が Ψ に関して停留する条件から得られる方程式の共役方程式だ. これは場の方程式が多くなりすぎないために必要だ. 場 Ψ の正準共役量は,

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Psi}} = -\bar{\Psi}\gamma^0 \tag{7.5.35}$$

なので, $\bar{\Psi}$ を Ψ のような場と見なすべきではなく, Ψ の正準共役量に比例する場と見なすべきだ. ハミルトニアンは次のとおりだ.

$$H = \int d^3x[\Pi\dot{\Psi} - \mathcal{L}] = \int d^3x\Big[\Pi\gamma^0[\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m]\Psi + \mathcal{H}\Big] .$$

これを, 以下のように書いておく.

$$H = H_0 + V \tag{7.5.36}$$

ここで,

$$H_0 = \int d^3x\,\Pi\gamma_0[\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m]\Psi , \tag{7.5.37}$$

$$V = \int d^3x\,\mathcal{H}(\bar{\Psi}, \Psi) \tag{7.5.38}$$

だ.

次に, 相互作用表示に移行する. (7.5.35) は時刻を含まないので, 相似変換 (7.1.28), (7.1.29) よりただちに

$$\pi = -\bar{\psi}\,\gamma^0 \tag{7.5.39}$$

が得られる. 同様に, H_0 と $V(t)$ は, (7.5.37) と (7.5.38) で Ψ と Π を ψ と π に置き換えれば計算できる. これより運動方程式,

$$\dot{\psi} = \frac{\delta H_0}{\delta\pi} = \gamma_0(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m)\psi \tag{7.5.40}$$

あるいは, より簡潔に書いて,

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = 0 \tag{7.5.41}$$

が得られる. (もう一方の運動方程式 $\dot{\pi} = -\delta H_0/\delta\psi$ はちょうどこの方程式の共役方程式になる.) (7.5.41) を満たす任意の場はフーリエ変換,

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_\sigma \Big\{ u(\mathbf{p},\sigma)\, e^{ip\cdot x} a(\mathbf{p},\sigma) + v(\mathbf{p},\sigma) e^{-ip\cdot x} b^\dagger(\mathbf{p},\sigma) \Big\} \tag{7.5.42}$$

として書ける. ここで $p^0 \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, また $a(\mathbf{p},\sigma)$ と $b^\dagger(\mathbf{p},\sigma)$ は係数演算子だ. また $u(\mathbf{p},\pm\frac{1}{2})$ は,

$$(i\gamma^\mu p_\mu + m)\, u(\mathbf{p},\sigma) = 0 \tag{7.5.43}$$

の二つの独立な解で, 同様に v は,

$$(-i\gamma^\mu p_\mu + m)\, v(\mathbf{p},\sigma) = 0 \tag{7.5.44}$$

の二つの独立な解であり, それぞれ以下のように規格化されている.*

$$\sum_\sigma u(\mathbf{p},\sigma)\bar{u}(\mathbf{p},\sigma) = \frac{(-i\gamma^\mu p_\mu + m)}{2p^0}\,, \tag{7.5.45}$$

$$\sum_\sigma v(\mathbf{p},\sigma)\bar{v}(\mathbf{p},\sigma) = -\frac{(i\gamma^\mu p_\mu + m)}{2p^0}\,. \tag{7.5.46}$$

望みの反交換子,

$$\Big[\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\, \bar{\psi}_\beta(\mathbf{y},t)\Big]_+ = \Big[\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\, \pi_\gamma(\mathbf{y},t)\Big]_+ (\gamma^0)_{\gamma\beta} = i\,(\gamma^0)_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,, \tag{7.5.47}$$

$$\Big[\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\, \psi_\beta(\mathbf{y},t)\Big]_+ = 0 \tag{7.5.48}$$

---

*行列 $i\gamma^\mu p_\mu$ は固有値 $\pm m$ を持つので, $\Sigma u\bar{u}$ と $\Sigma v\bar{v}$ はそれぞれ射影行列 $(-i\gamma^\mu p_\mu + m)/2m$ と $(i\gamma^\mu p_\mu + m)/2m$ に比例しなければならない. 比例因子は符号を除いて u と v の定義に吸収することで調整できる. 全体の符号は以下の正定値性から決定される. すなわち, $\mathrm{Tr}\ \Sigma u\bar{u}\beta = \Sigma u^\dagger u$ と $\mathrm{Tr}\ \Sigma v\bar{v}\beta = \Sigma v^\dagger v$ は正でなければならない.

を得るには, 反交換関係,

$$\left[a(\mathbf{p},\sigma),\, a^\dagger(\mathbf{p}',\sigma')\right]_+ = \left[b(\mathbf{p},\sigma),\, b^\dagger(\mathbf{p}',\sigma')\right]_+ = \delta^3(\mathbf{p}'-p)\delta_{\sigma'\sigma}\,, \tag{7.5.49}$$

$$\left[a(\mathbf{p},\sigma),\, a(\mathbf{p}',\sigma')\right]_+ = \left[b(\mathbf{p},\sigma),\, b(\mathbf{p}',\sigma')\right]_+ = \left[a(\mathbf{p},\sigma),\, b(\mathbf{p}',\sigma')\right]_+ = \left[a(\mathbf{p},\sigma),\, b^\dagger(\mathbf{p}',\sigma')\right]_+ = 0 \tag{7.5.50}$$

およびその共役な関係を採用しなければならない. これらは 5 章で得られた結果と一致し, これで, (7.5.37) はスピン 1/2 の正しい自由粒子ハミルトニアンであることが証明された. a と b を使えば, このハミルトニアンは以下のとおりだ.

$$H_0 = \sum_\sigma \int d^3p\, p^0 \Big(a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)a(\mathbf{p},\sigma) - b(\mathbf{p},\sigma)b^\dagger(\mathbf{p},\sigma)\Big)\,. \tag{7.5.51}$$

これは, 以下のように, もっとよく使われている自由粒子のハミルトニアンに余分な無限大の c 数を付け加えたものに書き換えられる.**

$$H_0 = \sum_\sigma \int d^3\mathbf{p}\, p^0 \Big[a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)a(\mathbf{p},\sigma) + b^\dagger(\mathbf{p},\sigma)b(\mathbf{p},\sigma) - \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p})\Big]\,. \tag{7.5.52}$$

(7.5.52) の c 数項は重力現象について頭を悩ますときにだけ重要だ. そのことを除けばここでは, スカラー場の場合と同様に, その項を捨てることができる. なぜなら, その項はすべてのエネルギーを測定する基準になるエネルギーのゼロ点に影響するだけだからだ. この了解のもとで, H_0 は, ボゾンの場合と同様に, 正の演算子だ.

---

c 数の項の負符号に留意しよう. **超対称性 (supersymmetry)[4] と呼ばれる対称性が存在すると考えられているが, この対称性は, ボゾン場とフェルミオン場の数を関係付けて, H_0 の c 数をすべて相殺する.

7.6 拘束条件とディラック括弧

ラグランジアンからハミルトニアンを導く際の主要な障害は, 拘束条件が生じることだ. この問題の標準となる解析はディラック[5]によりなされたので, ここでは, 彼の用語に従うことにする. この章で議論する単純な理論では, ディラックの解析は実際上必要ない. なぜなら, それらについては拘束のない正準変数を同定することが容易だからだ. ここでは例として質量がゼロでない実ベクトル場の理論を使う. 次の章でディラックの方法に戻るが, そこではディラックの方法が実際に役に立つ.

第 1 次拘束条件 (primary constraint) は, (次の章で電磁場のゲージを選ぶときのように) 系に課されるか, またはラグランジアン自身の構造から生じる. 後者の型の例として, カレント J_μ と相互作用する質量がゼロでないベクトル場 V^μ のラグランジアン (7.5.11) を考える.

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}\ F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, m^2\, V_\mu V^\mu + J_\mu V^\mu\ . \tag{7.6.1}$$

ここで,

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \tag{7.6.2}$$

だ. V^μ の 4 成分をすべて同等に扱ってみよう. すると, 共役量を,

$$\Pi^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 V_\mu)} = -F^{0\mu} \tag{7.6.3}$$

と定義すべきだ. ただちに以下の第 1 次拘束条件に気付く.

$$\Pi_0 = 0\ . \tag{7.6.4}$$

もっと一般的には, 方程式 $\Pi_\ell = \delta L/\delta\partial_0\Psi^\ell$ が解けてすべての $\partial_0\Psi^\ell$ が (少なくとも局所的に) Π_ℓ と Ψ^ℓ で与えられるようにできないときは, つねに第 1 次拘束条件に出合う. これは, 行列 $\delta^2 L/\delta(\partial_0\Psi^\ell)\,\delta(\partial_0\Psi^m)$

の行列式がゼロならば, またそのときに限り, 起こる. そのようなラグランジアンは**非正則** (irregular) と呼ばれる.

次に**第 2 次拘束条件** (secondary constraint) が存在する. これは第 1 次拘束条件が運動方程式と矛盾しないという要求から出てくる. 質量がゼロでないベクトル場の場合, これはちょうど V^0 についてのオイラー・ラグランジュ方程式 (7.5.16) だ.

$$\partial_i \Pi_i = m^2 V^0 - J^0 \,. \tag{7.6.5}$$

ここではこれで終わりだが, 他の理論では第 2 次拘束条件が運動方程式と矛盾しないことを要求すると, さらに拘束条件が出てくることもある. 拘束条件の第 1 次, 第 2 次等の違いは重要ではなく, ここではそれらすべてを一緒に取り扱う.

拘束条件の間には, もっと重要な別の分類が存在する. 質量がゼロでないベクトル場について見つけた拘束条件は, **第 2 類** (second class) と呼ばれる型だ. これに関しては, 交換関係についての普遍的な処方箋がある. 第 1 類と第 2 類の拘束条件の分類と第 2 類拘束条件を取り扱うための処方箋を説明するためには, まず古典力学のポアソン括弧の定義を思い出すのが有益だ.

変数 $\Psi^a(t)$ の組とその時間微分 $\dot{\Psi}^a(t)$ とに依存する任意のラグランジアン $L(\Psi, \dot{\Psi})$ を考える. (場の量子論のラグランジアンは特殊な場合で, 添字 a は ℓ と $\mathbf{x}$ の対のすべてにわたって値をとる.) これらの変数のすべてについて,

$$\Pi_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}^a} \tag{7.6.6}$$

で正準共役量を定義できる. Π と Ψ は一般的には独立な変数でなく, さまざまな第 1 次および第 2 次の拘束条件で関連づけられているかもしれない. ポアソン括弧は, 以下で定義される.

$$[A, B]_{\mathrm{P}} \equiv \frac{\partial A}{\partial \Psi^a}\frac{\partial B}{\partial \Pi_a} - \frac{\partial B}{\partial \Psi^a}\frac{\partial A}{\partial \Pi_a} \tag{7.6.7}$$

ここで, Ψ^a と Π_a に関する微分を計算する際に拘束条件は無視する. 特に, $[\Psi^a, \Pi_b]_{\mathrm{P}} = \delta^a_b$ が常に成り立つ. (これ以降, すべての場は同時刻で考え, 時刻の引数を常に省略する.) これらの括弧は交換子と同じ以下の代数的性質を持つ.

$$[A, B]_{\mathrm{P}} = -[B, A]_{\mathrm{P}}, \tag{7.6.8}$$

$$[A, BC]_{\mathrm{P}} = [A, B]_{\mathrm{P}} C + B[A, C]_{\mathrm{P}}. \tag{7.6.9}$$

またヤコビの恒等式,

$$[A, [B, C]_{\mathrm{P}}]_{\mathrm{P}} + [B, [C, A]_{\mathrm{P}}]_{\mathrm{P}} + [C, [A, B]_{\mathrm{P}}]_{\mathrm{P}} = 0 \tag{7.6.10}$$

も成立する. もし通常の交換関係 $[\Psi^a, \Pi_b] = i\delta^a_b$, $[\Psi^a, \Psi^b] = [\Pi_a, \Pi_b] = 0$ を採用することができるなら, Ψ と Π の任意の 2 関数の交換子はちょうど $[A, B] = i[A, B]_{\mathrm{P}}$ であろう. しかし, 拘束条件の結果, 必ずしもこのようにできるとは限らない.

拘束条件は一般に $\chi_N = 0$ の形で表される. ここで, χ_N は Ψ と Π の関数の組だ. 第 1 次拘束条件とともに第 2 次拘束条件も含めて考えているので, すべての拘束条件の組は必然的に運動方程式 $\dot{A} = [A, H]_{\mathrm{P}}$ と矛盾せず, よって, 拘束条件 $\chi_N = 0$ が満たされているとき,

$$[\chi_N, H]_{\mathrm{P}} = 0 \tag{7.6.11}$$

となる.

もし, ある拘束条件と他のすべての拘束条件のポアソン括弧が, (ポアソン括弧を計算した後に) 拘束条件を課すとゼロになるとき, その拘束条件を**第 1 類** (first class) と呼ぶ. そのような拘束条件の簡単な例は次の章の電磁場の量子化での拘束条件に見られる. そこでは, 第 1 類拘束条件は作用の対称性, すなわち電磁場のゲージ不変性から生じる. 実際, 第 1 類拘束条件の組 $\chi_N = 0$ は常に一群の対称性と結び

ついており, その対称性のもとで任意の量 A は以下の微小変換を受ける.

$$\delta_N A \equiv \sum_N \epsilon_N \left[\chi_N, A\right]_{\mathrm{P}} . \tag{7.6.12}$$

(場の理論ではこれらは局所的変換である. なぜなら, 添字 N は時空間座標を含むからだ.) (7.6.11) は, この変換によりハミルトニアンが不変に保たれることを示している. また, 第 1 類拘束条件の各々は他のすべての拘束条件を不変に保つ. そのような第 1 類拘束条件はゲージの選択によって取り除くことができる.

すべての第 1 類拘束条件をゲージの選択により取り除いた後, 残った拘束条件 $\chi_N = 0$ は, これらの拘束条件相互のポアソン括弧のどのような線形結合 $\sum_N u_N[\chi_N, \chi_M]_{\mathrm{P}}$ もゼロにならないものだ. すると, 残った拘束条件のポアソン括弧の行列は非特異, すなわち,

$$\mathrm{Det}\, C \neq 0 \tag{7.6.13}$$

となる. ここで,

$$C_{NM} \equiv [\chi_N, \chi_M]_{\mathrm{P}} \tag{7.6.14}$$

だ. この種の拘束条件を**第 2 類**と呼ぶ. 第 2 類拘束条件は常に偶数個存在しなければならないことに留意せよ. なぜなら, 奇数次の反対称行列の行列式は必ずゼロだからだ.

すでに見たように, 質量がゼロでない実ベクトル場の場合, 拘束条件は次のとおりだ.

$$\chi_{1\mathbf{x}} = \chi_{2\mathbf{x}} = 0 \tag{7.6.15}$$

ここで,

$$\chi_{1\mathbf{x}} = \Pi_0(\mathbf{x}) , \qquad \chi_{2\mathbf{x}} = \partial_i \Pi_i(\mathbf{x}) - m^2 V^0(\mathbf{x}) - J^0(\mathbf{x}) \tag{7.6.16}$$

だ. これらの拘束条件のポアソン括弧は以下のとおりで,

$$C_{1\mathbf{x},2\mathbf{y}} = -C_{2\mathbf{y},1\mathbf{x}} = [\chi_{1\mathbf{x}}, \chi_{2\mathbf{y}}]_{\mathrm{P}} = m^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{7.6.17}$$

もちろん,

$$C_{1\mathbf{x},1\mathbf{y}} = C_{2\mathbf{x},2\mathbf{y}} = 0 \tag{7.6.18}$$

だ. この「行列」は明らかに非特異で, よって拘束条件 (7.6.15) は第 2 類の拘束条件だ.

ディラックは, すべての拘束条件が第 2 類のとき, 交換関係は,

$$[A, B] = i[A, B]_{\mathrm{D}} \tag{7.6.19}$$

で与えられることを示唆した. ここで, $[A, B]_{\mathrm{D}}$ はポアソン括弧の一般化で, **ディラック括弧** (Dirac bracket) として知られている.

$$[A, B]_{\mathrm{D}} \equiv [A, B]_{\mathrm{P}} - [A, \chi_N]_{\mathrm{P}} \left(C^{-1}\right)^{NM} [\chi_M, B]_{\mathrm{P}} \,. \tag{7.6.20}$$

(ここで N と M は空間の位置を含む複合指標で, ベクトル場の例では $1, \mathbf{x}$ および $2, \mathbf{x}$ 等の値をとる.) ディラックは次のことに気付いた. すなわち, ディラック括弧はポアソン括弧と同様に, 交換子と同じ代数関係,

$$[A, B]_{\mathrm{D}} = -[B, A]_{\mathrm{D}} \,, \tag{7.6.21}$$

$$[A, BC]_{\mathrm{D}} = [A, B]_{\mathrm{D}} C + B[A, C]_{\mathrm{D}} \,, \tag{7.6.22}$$

$$[A, [B, C]_{\mathrm{D}}]_{\mathrm{D}} + [B, [C, A]_{\mathrm{D}}]_{\mathrm{D}} + [C, [A, B]_{\mathrm{D}}]_{\mathrm{D}} = 0 \tag{7.6.23}$$

および関係,

$$[\chi_N, B]_{\mathrm{D}} = 0 \tag{7.6.24}$$

を満たす. 最後の式は, 交換関係 (7.6.19) が $\chi_N = 0$ と矛盾しないために必要だ. また, χ_N を, $\chi_N = 0$ で定義される位相空間の部分多様体と同じ部分多様体を定義する任意の関数 χ'_N で置き換えても, ディラック括弧は不変だ. しかし, これらすべての性質に同意しても, それで交換子が実際にディラック括弧を用いて (7.6.19) で与えられることの証明にはならない.

この問題は益川と中島[6]によって証明された強力な定理により解明された．かれらが示したのは，第2類の拘束条件に従う正準変数 Ψ^a, Π_a の任意の組について，正準変換* により，2組の変数 Q^n, $\mathcal{Q}^r$ とそれぞれの共役量 P_n, $\mathcal{P}_r$ を構成して，拘束条件が $\mathcal{Q}^r = \mathcal{P}_r = 0$ となるようにすることが常に可能だということだ．これらの座標を用いてポアソン括弧を計算し，拘束条件の関数を $\chi_{1r} = \mathcal{Q}^r$, $\chi_{2r} = \mathcal{P}_r$ と再定義すれば，

$$C_{1r,2s} = [\mathcal{Q}^r, \mathcal{P}_s]_P = \delta^r_s \ ,$$

$$C_{1r,1s} = [\mathcal{Q}^r, \mathcal{Q}^s]_P = 0 \ , \quad C_{2r,2s} = [\mathcal{P}_r, \mathcal{P}_s]_P = 0$$

となり，任意の関数 A, B について，

$$[A, \chi_{1r}]_P = -\frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}_r} \ , \quad [A, \chi_{2r}]_P = \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r}$$

が得られる．この C 行列は逆行列 $C^{-1} = -C$ をもち，よってディラック括弧 (7.6.20) はここでは

$$\begin{aligned}[A, B]_D &= [A, B]_P + [A, \chi_{1r}]_P[\chi_{2r}, B]_P - [A, \chi_{2r}]_P[\chi_{1r}, B]_P \\ &= [A, B]_P - \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r}\frac{\partial B}{\partial \mathcal{P}_r} + \frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^r}\frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}_r} \\ &= \frac{\partial A}{\partial Q^n}\frac{\partial B}{\partial P_n} - \frac{\partial B}{\partial Q^n}\frac{\partial A}{\partial P_n} \end{aligned} \tag{7.6.25}$$

となる．言い換えれば，ディラック括弧は拘束を受けない正準変数 Q^n, P_n の組について計算したポアソン括弧に等しい．拘束を受けないこ

---

*正準変換とは，位相空間の座標の組 Ψ^a, Π_a から，他の位相空間の座標 $\tilde{\Psi}^a$, $\tilde{\Pi}_a$ で $[\tilde{\Psi}^a, \tilde{\Pi}_b]_P = \delta^a_b$ と $[\tilde{\Psi}^a, \tilde{\Psi}^b]_P = [\tilde{\Pi}_a, \tilde{\Pi}_b]_P = 0$ を満たすものへの変換のことであった．ここで，ポアソン括弧は Ψ^a と Π_a に関して計算する．これより，任意の関数 A, B のポアソン括弧は，Ψ^a と Π_a に関して計算しても，$\tilde{\Psi}^a$ と $\tilde{\Pi}_a$ に関して計算しても同じであることがわかる．また，もし Ψ^a と Π_a がハミルトニアンの運動方程式を満たすならば，$\tilde{\Psi}^a$ と $\tilde{\Pi}_a$ も同じハミルトニアンの運動方程式を満たすこともわかる．ラグランジアンは正準変換によって変化するが，その変化分はある量の時間微分だけであり，作用には影響しない．

れらの変数が正準交換関係を満たすなら, 一般の演算子 A, B の交換子はディラック括弧を用いて (7.6.19) で与えられる.**

ここで質量がゼロでないベクトル場に戻って, それがディラック括弧を用いてどのように量子化されるかを見よう. これは, 拘束を受ける変数 V^0 と Π_0 を拘束を受けない変数† V_i と Π_i で簡単に表せる例だ. すなわち, 単に $\Pi_0 = 0$ で, V^0 は (7.6.5) で与えられる. (7.6.17) と (7.6.18) から C_{NM} はここでは逆,

$$(C^{-1})^{1\mathbf{x},2\mathbf{y}} = -(C^{-1})^{2\mathbf{y},1\mathbf{x}} = -m^{-2}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,, \tag{7.6.26}$$

$$(C^{-1})^{1\mathbf{x},1\mathbf{y}} = (C^{-1})^{2\mathbf{x},2\mathbf{y}} = 0\,. \tag{7.6.27}$$

を持つ. よって, ディラックの処方 (7.6.19), (7.6.20) より, 以下の同時刻交換関係が得られる.

$$\begin{aligned}&[A,B] = i[A,B]_{\mathrm{P}}\\ &+i\,m^{-2}\int d^3z\,\Big([A,\Pi_0(\mathbf{z})]_{\mathrm{P}}\,[\partial_i\Pi_i(\mathbf{z}) - m^2V^0(\mathbf{z}) - J^0(\mathbf{z}), B]_{\mathrm{P}}\\ &\qquad\qquad - A\leftrightarrow B\Big)\,.\end{aligned} \tag{7.6.28}$$

定義より, 以下のとおりだ.

$$\begin{aligned}&[V^\mu(\mathbf{x}),\Pi_\nu(\mathbf{y})]_{\mathrm{P}} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta^\mu_\nu\,,\\ &[V^\mu(\mathbf{x}),V^\nu(\mathbf{y})]_{\mathrm{P}} = [\Pi_\mu(\mathbf{x}),\Pi_\nu(\mathbf{y})]_{\mathrm{P}} = 0\,.\end{aligned} \tag{7.6.29}$$

**益川・中島の正準変換によって構成された拘束を受けない変数 Q^n と P_n に対して正準交換関係を採用すべきかどうかは依然未解決の問題だ. 最終的には, そのような正準交換関係が正しいかどうかは, それが 5 章で導いた自由場の交換関係と矛盾がないかどうかで決まるが, これを試すには Q^n と P_n がどのようなものかを知る必要がある. この章の補遺で二つの大きな種類の理論を示すが, それらの理論では, 1 組の拘束を受けない Q と P が同定でき, ディラックの交換関係 (7.6.19) が Q と P の通常の正準交換関係から導かれる. また, これらの場合に, 拘束を受けない Ψ と Π に関して定義したハミルトニアンは, 拘束を受ける変数を用いた時と同様に書けることも示す.

†これは, 補遺 A で議論する理論の特別の場合だ.

よって, 以下の交換関係が得られる.

$$
\begin{aligned}
&[V^i(\mathbf{x}), V^j(\mathbf{y})] = [V^0(\mathbf{x}), V^0(\mathbf{y})] = 0 \,, \\
&[V^i(\mathbf{x}), V^0(\mathbf{y})] = -im^{-2}\partial_i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \,, \\
&[V^i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = i\delta^i_j\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \,, \\
&[V^0(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = [V^\mu(\mathbf{x}), \Pi_0(\mathbf{y})] = 0 \,, \\
&[\Pi^\mu(\mathbf{x}), \Pi^\nu(\mathbf{y}] = 0 \,.
\end{aligned}
\tag{7.6.30}
$$

これらは確かにちょうど, 拘束を受けない変数は通常の正準交換関係 $[V^i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = i\delta^i_j\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, $[V^i(\mathbf{x}), V^j(\mathbf{y})] = [\Pi_i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = 0$ を満たすことを仮定し, Π_0 と V^0 を含む交換子は拘束条件を用いて評価した場合に得られる交換関係だ.

7.7　場の再定義と余剰結合*

質量や S 行列のような観測量は作用のいくつかの結合パラメータには依存しない. このパラメータは**余剰** (redundant) パラメータとして知られている. これは, これらのパラメータの変化は単に場の変数を再定義することによって元に戻せるからだ. 微小な局所変換 $\Psi^\ell(x) \to \Psi^\ell(x) + \epsilon F^\ell(\Psi(x), \partial_\mu\Psi(x), \cdots)$ のような場の連続的な再定義は, もちろん, 場自身の行列要素の値を変えることはあっても, 明らかに理論のどのような観測量** にも影響を与えることができない.

理論のパラメータのある変化が場の再定義で相殺できるか否かはどうすればわかるだろう. 場の連続的で局所的な再定義は作用に以下の

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

**例えば, 10.2 節の定理によれば, 正しい場のくりこみ定数をかけさえすれば, S 行列要素は, 真空と反応に関与する粒子の 1 粒子状態との間でゼロでない行列要素をもつ任意の演算子の時間順序積の真空期待値から得られる.

形の変化を生じる.

$$\delta I[\Psi] = \epsilon \sum_{\ell} \int d^4x \, \frac{\delta I[\Psi]}{\delta \Psi^{\ell}(x)} \, F^{\ell}(\Psi(x), \partial\Psi(x), \cdots) \quad . \qquad (7.7.1)$$

よって, 結合パラメータ g_i の任意の変化 δg_i は, 作用に次の形の変化を生じるならば,

$$\sum_i \frac{\partial I}{\partial g_i} \, \delta g_i = -\epsilon \sum_{\ell} \int d^4x \, \frac{\delta I[\Psi]}{\delta \Psi^{\ell}(x)} \, F^{\ell}(\Psi(x), \partial\Psi(x), \cdots) \, , \qquad (7.7.2)$$

場の再定義,

$$\Psi^{\ell}(x) \to \Psi^{\ell}(x) + \epsilon F^{\ell}(\Psi(x), \partial_{\mu}\Psi(x), \cdots)$$

により相殺することができ, よってどの観測量にも影響を与えない. 言い換えれば, 結合パラメータは, このパラメータを変化させたときの作用の変化が場の方程式 $\delta I/\delta\Psi^{\ell} = 0$ を用いたときゼロになるなら, 余剰だ.

例えば, スカラー場の理論のラグランジアン密度を以下の形に書いたとしよう.

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2} \, Z \, (\partial^{\mu}\Phi \, \partial_{\mu}\Phi + m^2\Phi^2) - \tfrac{1}{24} \, gZ^2\Phi^4 \, .$$

定数 Z は余剰結合定数だ. なぜなら,

$$\frac{\partial I}{\partial Z} = \tfrac{1}{2} \int d^4x \; \Phi \, (\Box\Phi - m^2\Phi - \tfrac{1}{6} \, gZ\Phi^3)$$

であり, これは場の方程式,

$$\Box\Phi - m^2\Phi = \tfrac{1}{6} \, gZ\Phi^3$$

を使えばゼロになるからだ. 一方, 裸の質量 m や結合定数 g は 余剰でなく, m と g の関数も余剰でない.

この例では, Z の変化を相殺するために必要な場の再定義は単に大きさの変更であり, F は Φ に比例する. (このため Z は場のくりこみ定数と呼ばれる.) これは, この作用の一般的な形を不変に保つ最も一般的な場の変換だ. しかし, 12.3 節と 12.4 節で考察する任意個の場とその微分を含むもっと一般的な作用では, 場の線形な再定義だけでなく非線形な再定義も考慮する必要があり, また理論のパラメータの無限個の部分集合は余剰であろう.

補遺：正準交換子から求めたディラック括弧

この補遺では, 交換子を i 倍のディラック括弧として与える式が, 縮小した変数の組についての通常の正準交換関係から導かれることを, 二つの型の理論において示す.

A

ラグランジアン L に現れる量子変数 Ψ^a と Π_a が二つの部類* に分けることができて, 一方は ($V^i(\mathbf{x})$ のように) 独立な正準変数 Q^n で独立な正準共役量 $P_n = \partial L/\partial \dot{Q}^n$ を持ち, 他方は (V^0 のように) ラグランジアンにその時間微分が現れない組 $\mathcal{Q}^r(\mathbf{x})$ としよう. (質量がゼロでないベクトル場 V^μ の場合がこれにあたる.) 第 1 次拘束条件は $\chi_{1r} = 0$ だ. ここで,

$$\chi_{1r} = \mathcal{P}_r \tag{7.A.1}$$

は $\mathcal{Q}^r$ の共役変数だ. 第 2 次拘束条件は $\mathcal{Q}^r$ の運動方程式 $0 = \partial L/\partial \mathcal{Q}^r$ から生じる. この拘束条件は「解ける」, すなわち, $\chi_{2r} = 0$ の形で書

---

*ふたたび簡潔な記法を用いて, a, n, r のような添字は離散的な指標だけでなく空間座標 $\mathbf{x}$ も含むとする. 繰り返された添字は和と積分をする. すべての量子変数は同時刻で評価することとし, 共通の時刻の引数をどこでも省略する. 量 $\mathcal{Q}^r$ は 7.2 節で導入した C^r と同じだ.

けるとしよう．ここで χ_{2r} は，

$$\chi_{2r} = \mathcal{Q}^r - f^r(Q, P) \tag{7.A.2}$$

の形を取るとする．((7.6.5) はその例になっており，V^0 は独立な P (ここでは Π_i) と Q で与えられる.) 独立な Q と P は通常の正準交換則，

$$[Q^n, P_m] = i\delta^n_m \;, \qquad [Q^n, Q^m] = [P_n, P_m] = 0 \tag{7.A.3}$$

を満たすと仮定する．拘束条件 $\chi_{2r} = 0$ より，$\mathcal{Q}$ を含む交換子は以下のように与えられる．

$$[\mathcal{Q}^r, Q^n] = -i\frac{\partial f^r}{\partial P_n} \;, \qquad [\mathcal{Q}^r, P_n] = i\frac{\partial f^r}{\partial Q^n} \;, \tag{7.A.4}$$

$$[\mathcal{Q}^r, \mathcal{Q}^s] = i\Gamma^{rs} \;. \tag{7.A.5}$$

ここで，Γ^{rs} は以下のポアソン括弧だ．

$$\Gamma^{rs} \equiv [f^r, f^s]_{\mathrm{P}} \;. \tag{7.A.6}$$

もちろん，$\mathcal{P}_r$ を含むすべての交換子はゼロだ．

$$[\mathcal{P}_r, Q^n] = [\mathcal{P}_r, P_n] = [\mathcal{P}_r, \mathcal{Q}^s] = [\mathcal{P}_r, \mathcal{P}_s] = 0 \;. \tag{7.A.7}$$

次にこれらの交換子をディラック括弧と比較しよう．拘束関数のポアソン括弧は以下のとおりだ．

$$C_{1r,1s} \equiv [\chi_{1r}, \chi_{1s}]_{\mathrm{P}} = 0 \;, \tag{7.A.8}$$

$$C_{1r,2s} \equiv -C_{2s,1r} \equiv [\chi_{1r}, \chi_{2s}]_{\mathrm{P}} = -\delta^s_r \;, \tag{7.A.9}$$

$$C_{2r,2s} \equiv [\chi_{2r}, \chi_{2s}]_{\mathrm{P}} = [f^r(Q,P), f^s(Q,P)]_{\mathrm{P}} \equiv \Gamma^{rs} \;. \tag{7.A.10}$$

(質量がゼロでないベクトル場の例では，Γ^{rs} はゼロだが，ここでの議論は Γ^{rs} がゼロでない場合にも成り立つ.) C 行列が逆，

$$(C^{-1})^{1r,1s} = \Gamma^{rs} \;, \qquad (C^{-1})^{2r,2s} = 0 \;,$$

$$(C^{-1})^{1r,2s} = -(C^{-1})^{2s,1r} = \delta^r_s \tag{7.A.11}$$

を持つことは容易にわかる. また, 任意の関数 A と拘束関数とのポアソン括弧は以下のとおりだ.

$$[A, \chi_{1r}]_{\mathrm{P}} = \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r}\,, \qquad [A, \chi_{2r}]_{\mathrm{P}} = -\frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}_r} - [A, f^r(Q, P)]_{\mathrm{P}}\,.$$

よって, ディラック括弧は,

$$\begin{aligned} [A, B]_{\mathrm{D}} = [A, B]_{\mathrm{P}} &- \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r}\frac{\partial B}{\partial \mathcal{P}_r} + \frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^r}\frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}_r} \\ &+ \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r}\Gamma^{rs}\frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^s} - \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r}[B, f^r]_{\mathrm{P}} + [A, f^r]_{\mathrm{P}}\frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^r} \end{aligned} \tag{7.A.12}$$

となる.

ここで, A と B がともに独立な正準変数 Q^n と P_n のみの関数ならば, $\partial A/\partial \mathcal{Q}^r = \partial B/\partial \mathcal{Q}^r = 0$ なので, ディラック括弧はポアソン括弧に等しい. 特に,

$$[Q^n, P_m]_{\mathrm{D}} = \delta^n_m\,, \qquad [Q^n, Q^m]_{\mathrm{D}} = [P_n, P_m]_{\mathrm{D}} = 0 \tag{7.A.13}$$

となる. A が $\mathcal{Q}^r$ で B が Q と P の関数ならば, (7.A.12) の右辺に寄与するのは第 5 項だけだ. 特に,

$$[\mathcal{Q}^r, Q^n]_{\mathrm{D}} = -\frac{\partial f^r}{\partial P_n}\,, \qquad [\mathcal{Q}^r, P_n]_{\mathrm{D}} = +\frac{\partial f^r}{\partial Q^n} \tag{7.A.14}$$

となる. A と B の両方が $\mathcal{Q}$ のときは, 第 4 項だけが残る.

$$[\mathcal{Q}^r, \mathcal{Q}^s]_{\mathrm{D}} = \Gamma^{rs}\,. \tag{7.A.15}$$

最後に, A は $\mathcal{P}_r$ で B は任意の場合, 第 1 項と第 3 項が残るが, それは打ち消しあう.

$$[\mathcal{P}_r, B]_{\mathrm{D}} = [\mathcal{P}_r, B]_{\mathrm{P}} + \frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^r} = 0\,. \tag{7.A.16}$$

(7.A.13)–(7.A.16) を (7.A.3)–(7.A.7) と比較すると, すべての場合に, 交換子はディラック括弧に i をかけたものに等しいことがわかる. こ

れは最初から予期されたことだ．なぜなら，7.6 節で指摘したように，拘束関数を含むディラック括弧はすべてゼロなので，$\mathcal{Q}^r$ と $\mathcal{P}_s$ の両方かまたは $\mathcal{Q}^r$ と $\mathcal{P}_s$ のどちらかを含むディラック括弧は，それらの $\mathcal{Q}^r$ と $\mathcal{P}_s$ を拘束条件の方程式を用いて独立な Q と P で表すことにより与えられるからだ．

B

次に，以下の場合を考察する．すなわち，拘束条件は，Ψ^a に対する条件 $\chi_{1r}(\Psi) = 0$ の形をとり，それは解けて Ψ^a が拘束のない変数 Q^n のもっと小さな組で表せ，また，Π_a に対する同数の別の条件 $\chi_{2r}(\Pi) = 0$ があり，それは解けて Π_a が拘束のない P_n のもっと小さな組で表せる場合だ．(次の章で見る例では，Ψ^a に対する拘束条件は第 1 類拘束条件を取り除くために使われるゲージ固定条件であり，Π_a に対する拘束条件は第 1 類拘束条件と場の方程式との整合性から生じる第 2 次拘束条件だ.) 拘束を受けない変数は通常の正準交換関係，$[Q^n, P_m] = i\delta^n_m$，$[Q^n, Q^m] = [P_n, P_m] = 0$ を満たすと仮定する．拘束を受ける運動量と受けない運動量は，

$$P_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^n} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}^b}\frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n} = \Pi_b \frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n} \tag{7.A.17}$$

で関係している．これより，

$$[\Psi^a, \Pi_b]\frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n} = [\Psi^a, P_n] = i\frac{\partial \Psi^a}{\partial Q^n}$$

言い換えれば，

$$\left\{[\Psi^a, \Pi_b] - i\delta^a_b\right\}\frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n} = 0 \tag{7.A.18}$$

が得られる．いまや，拘束条件 $\chi_{1r}(\Psi) = 0$ はすべての Q に対する $\Psi^a = \Psi^a(Q)$ について満たされているので，以下が成り立つ．

$$\frac{\partial \chi_{1r}}{\partial \Psi^b}\frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n} = 0\,. \tag{7.A.19}$$

さらに，ベクトル $(V_r)_b \equiv \partial\chi_{1r}/\partial\Psi^b$ はすべてのベクトル $(U_n)^b \equiv \partial\Psi^b/\partial Q^n$ に垂直な完全系を作る．なぜなら，すべての n に対して $V_b(U_n)^b = 0$ を満たす他のベクトル V_b が存在すれば，Ψ^a に別な拘束条件が存在することになる．よって，(7.A.18) は，

$$[\Psi^a, \Pi_b] = i\delta^a_b + ic^a_r \frac{\partial\chi_{1r}}{\partial\Psi^b} \tag{7.A.20}$$

を意味する．ここで c^a_r は未知の係数だ．これらの係数を決めるには，残りの拘束条件 $\chi_{2r}(\Pi) = 0$ を使う．すると以下が導かれる．

$$0 = [\Psi^a, \chi_{2r}(\Pi)] = i[\Psi^a, \Pi_b]\frac{\partial\chi_{2r}(\Pi)}{\partial\Pi_b}\,.$$

(7.A.20) を用いると以下を得る．

$$\frac{\partial\chi_{2r}(\Pi)}{\partial\Pi_a} = -c^a_s \frac{\partial\chi_{1s}(\Psi)}{\partial\Psi^b}\frac{\partial\chi_{2r}(\Pi)}{\partial\Pi_b}\,. \tag{7.A.21}$$

c^a_s にかかる因子はポアソン括弧，

$$\frac{\partial\chi_{1s}(\Psi)}{\partial\Psi^b}\frac{\partial\chi_{2r}(\Pi)}{\partial\Pi_b} = [\chi_{1s}, \chi_{2r}]_{\mathrm{P}} \equiv C_{1s,2r}$$

だ．また，χ_{1s} は Ψ のみに，χ_{2r} は Π のみに依存するので，

$$C_{1r,1s} = C_{2r,2s} = 0$$

であり，よって $C_{1s,2r}$ は拘束条件の唯一のゼロでないポアソン括弧だ．こうして，(7.A.21) は，

$$\frac{\partial\chi_N}{\partial\Pi_a} = -c^a_s C_{1s,N} \tag{7.A.22}$$

と書くことができる．ここで N はすべての拘束関数についてである．第 2 類拘束条件については，これは以下の唯一の解を持つ．

$$c^a_s = -\frac{\partial\chi_N}{\partial\Pi_a}(C^{-1})^{N,1s} = -\frac{\partial\chi_{2r}}{\partial\Pi_a}(C^{-1})^{2r,1s}\,. \tag{7.A.23}$$

(7.A.20) でこれを用いれば,

$$[\Psi^a, \Pi_b] = i\left[\delta^a_b - \frac{\partial\chi_{2r}}{\partial\Pi_a}(C^{-1})^{2r,1s}\frac{\partial\chi_{1s}}{\partial\Psi^b}\right] \tag{7.A.24}$$

となる. Ψ^a および Π_b と拘束関数とのポアソン括弧は,

$$\begin{aligned} &[\Psi^a, \chi_{1r}]_\mathrm{P} = 0\,, && [\Psi^a, \chi_{2r}]_\mathrm{P} = \frac{\partial\chi_{2r}}{\partial\Pi_a}\,, \\ &[\chi_{1r}, \Pi_b]_\mathrm{P} = \frac{\partial\chi_{1r}}{\partial\Psi^b}\,, && [\chi_{2r}, \Pi_b]_\mathrm{P} = 0 \end{aligned} \tag{7.A.25}$$

なので, (7.A.24) の右辺の括弧内の量はディラック括弧,

$$[\Psi^a, \Pi_b] = i[\Psi^a, \Pi_b]_\mathrm{D} \tag{7.A.26}$$

だ. これは示したかったことだ. また, 容易にわかるように, C^{-1} は 11 と 22 成分がゼロなので, 残りのディラック括弧は,

$$[\Psi^a, \Psi^b]_\mathrm{D} = [\Pi_a, \Pi_b]_\mathrm{D} = 0 \tag{7.A.27}$$

となり, 以下の簡単な式が得られる.

$$[\Psi^a, \Psi^b] = i[\Psi^a, \Psi^b]_\mathrm{D}\,, \qquad [\Pi_a, \Pi_b] = i[\Pi_a, \Pi_b]_\mathrm{D}\,. \tag{7.A.28}$$

* * *

交換則に加えて, ハミルトニアンの陽な式も必要だ. 通常の正準形式では,

$$H = P_n\dot{Q}^n - L \tag{7.A.29}$$

ととる. ここで和は独立な正準変数についてとる. この補遺で考察した両方の型の理論では, このハミルトニアンは拘束を受ける変数を用いて,

$$H = \Pi_a\dot{\Psi}^a - L \tag{7.A.30}$$

と書ける. 型 A の理論ではこれは自明で, a に関する和は値 n と r についてとり, 前者については $\Psi^n = Q^n$ および $\Pi_n = P_n$ は独立な

正準変数であり, 後者については $\Pi_r = \mathcal{P}_r = 0$ だ. 型 B の理論では, (7.A.17) より,

$$P_n \dot{Q}^n = \Pi_b \frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n} \dot{Q}^n = \Pi_b \dot{\Psi}^b$$

となり, この場合も (7.A.30) が得られる.

問題

1. 1 組の実スカラー場 Φ^n の理論で, ラグランジアン密度が $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sum_{m\,n} \partial_\mu \Phi^n \partial^\mu \Phi^m f_{nm}(\Phi)$ のものを考える. ここで, $f_{nm}(\Phi)$ は場の任意の実正則行列関数だ. (これは**非線形シグマ模型** (non-linear σ -model) と呼ばれる.) この理論の正準量子化を行え. 相互作用表示での相互作用 $V[\phi(t), \dot{\phi}(t)]$ を導け.

2. 実スカラー場 Φ^n とディラック場 Ψ^i の理論で, ラグランジアン密度が $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ のものを考える. ここで, $\mathcal{L}_0$ は通常の自由場のラグランジアン密度で, $\mathcal{L}_1$ は Φ^n と Ψ^i を含むがそれらの微分は含まない相互作用項だ. 対称エネルギー・運動量テンソル $\Theta^{\mu\nu}$ の陽な表現を導け.

3. 問題 2 の理論で, ラグランジアン密度は大域的な微小変換 $\delta\Phi^n = i\epsilon \sum_m t^n{}_m \Phi^m$, $\delta\Psi^i = i\epsilon \sum_j \tau^i{}_j \Psi^j$ のもとで不変だとする. この対称性にともなう保存カレントの陽な表現を導け.

4. 複素スカラー場 Φ と実ベクトル場 V^μ の理論で, ラグランジアン密度が,

$$\mathcal{L} = -(D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - \tfrac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} m^2 V_\mu V^\mu - \mathcal{H}(\Phi^\dagger \Phi)$$

のものを考える. ここで, $D_\mu \equiv \partial_\mu - igV_\mu$ および $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ で, $\mathcal{H}$ は任意関数だ. この理論の正準量子化を行え. 相互作用表示での相互作用を導け.

5. 問題 4 の理論で, 対称エネルギー・運動量テンソル $\Theta^{\mu\nu}$ の表現と $\delta\Phi = i\epsilon\Phi$, $\delta V^{\mu} = 0$ のもとでの対称性にともなう保存カレントの表現を導け.

6. ディラック括弧はヤコビの恒等式 (7.6.23) を満たすことを証明せよ.

7. ディラック括弧は, 位相空間の与えられた部分多様体を記述するのに用いる拘束関数 χ_N の選び方には依らないことを証明せよ.

参考文献

1. H. B. G. Casimir, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **51**, 635 (1948); M. J. Spaarnay, *Nature* **180**, 334 (1957).

2. F. Belinfante, Physica **6**, 887 (1939); L. Rosenfeld, *Mémoires de l'Academie Roy. Belgique* **6**, 30 (1930) も見よ.

3. 例えば, S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972) 12 章を見よ.

4. 例えば, J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton University Press, Princeton, 1983), およびそこで引用されている原著論文を見よ.

5. P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University, New York, 1964). また, P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950); *Proc. Roy. Soc. London*, ser. A, **246**, 326 (1958); P. G. Bergmann, *Helv. Phys. Acta Suppl.* IV, 79 (1956) も見よ.

6. T. Maskawa and H. Nakajima, *Prog. Theor. Phys.* **56**, 1295 (1976). この文献に著者の注意を向けさせてくれた J. Feinberg

に感謝する.

第8章

量子電磁理論

量子電磁理論は, もともと, マックスウェルの古典電磁理論をそのまま量子化することで作られた. もう読者は驚かないだろうが, この本では違ったアプローチをとることにする. ここでは, まずスピンを持つ質量ゼロの粒子の量子論を作るときに起こる独特な問題を解決するためにゲージ不変性の原理が必要なことを述べる. そして, このゲージ不変性から電磁理論の主な性質を導く. その後で現代のより一般的なアプローチをとる. そこでは, ゲージ不変性を出発点として, ベクトル・ポテンシャルがスピン1の質量ゼロの粒子を記述することを導く.

これらのどちらが, 自然がとっている論理的順序により近いかはまだ知られていない. 多くの理論家はゲージ不変性を出発点ととるだろうが, 一方で, 現代の弦理論[1]では逆の立場をとる. つまり, 弦の固有振動としてスピン1の質量ゼロの粒子が現れるので, そのような粒子を記述する有効場の理論にゲージ不変性が必要となる. いずれにせよ, 以下に見るように, どちらのアプローチをとっても, 量子化されたマックスウェルの理論に行き着く. この量子電磁理論は今に至るまで場の量子論の典型的な成功例となっていて, 量子場の理論としてのパラダイムをなすに至っている.

8.1 ゲージ不変性

まず, ヘリシティ ±1 の質量ゼロの自由粒子の共変理論を構成するときに出会う困難を振り返ってみよう. 5.9 節では, そのような粒子の反対称テンソル自由場 $f_{\mu\nu}$ を問題なく構成できた. この場は (5.9.23) の 4 元ポテンシャル $a_\mu(x)$ を使って,

$$f_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu a_\nu(x) - \partial_\nu a_\mu(x) \tag{8.1.1}$$

とよく知られた形で書かれる. しかし, (5.9.31) は $a_\mu(x)$ がローレンツ変換に際して, 以下のようにゲージ変換の分だけ 4 元ベクトルからずれることを示している.

$$U_0(\Lambda)a_\mu(x)\,U_0^{-1}(\Lambda) = \Lambda_\mu{}^\nu a_\nu(\Lambda x) + \partial_\mu\Omega(x,\Lambda)\,. \tag{8.1.2}$$

実際, ヘリシティ ±1 だけの生成・消滅演算子の一次結合で真の 4 元ベクトルは構成できない. この点から, 質量がゼロでないベクトル場のプロパゲーター,

$$\Delta_{\mu\nu}(x,y) = (2\pi)^{-4}\int d^4x\; e^{iq\cdot(x-y)}\;\frac{\eta_{\mu\nu}+q_\mu q_\nu/m^2}{q^2+m^2-i\epsilon}$$

の $m=0$ での特異性を理解できる. つまり, この特異性のため, スピン 1 の質量がゼロでない粒子の理論から $m\to 0$ の極限をとって質量ゼロのヘリシティ ±1 の粒子の理論をつくることはできない.

この問題は, 全ての相互作用は, $A_\mu(x)$ ではなく $F_{\mu\nu}(x)\equiv\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)$ とその微分のみを含むよう要求することで解決できる.* しかし, これは最も一般的な可能性ではなく, 自然界で実現してもいない. ここでは, 作用に $A_\mu(x)$ が現れるのを禁止する代わりに, (8.1.2) の余分な項が影響しないように, 作用のうちの物質およびそれの輻射

*これ以降, 電磁ポテンシャルベクトルに A_μ を, 場のテンソルに $F_{\mu\nu}$ の記号を使う. これは, これらは相互作用する場であるためだ.

との相互作用の部分 I_M が, 一般的なゲージ変換,

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \epsilon(x) \tag{8.1.3}$$

のもとで (少なくとも物質場が場の方程式を満たすときに) 不変であると要求する. 物質場の作用は (8.1.3) の変換のもとで,

$$\delta I_M = \int d^4x \, \frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} \partial_\mu \epsilon(x) \tag{8.1.4}$$

だけ変化する. したがって, I_M のローレンツ不変性により,

$$\partial_\mu \frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} = 0 \tag{8.1.5}$$

が要求される. これは, I_M が物質場とともに $F_{\mu\nu}(x)$ とその微分のみを含むときには明らかに成立する. それは, この場合には,

$$\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} = 2\partial_\nu \, \frac{\delta I_M}{\delta F_{\mu\nu}(x)}$$

となるからだ. しかし, I_M が $A_\mu(x)$ 自身を含むときには (8.1.5) は理論にとって自明でない拘束となる.

さて, どんな理論ならば, $A_\mu(x)$ が結合できる保存カレントをつくれるだろうか? 7.3 節では, 作用が微小内部対称性変換に対して不変ならば, 保存カレントがあることを見た. 特に, 変換,**

$$\delta \Psi^\ell(x) = i\epsilon(x) \, q_\ell \, \Psi^\ell(x) \tag{8.1.6}$$

が ϵ が一定のときに物質場の作用を不変に保つとき, 一般の微小関数 $\epsilon(x)$ に対しては, 物質場の作用は,

$$\delta I_M = -\int d^4x \; J^\mu(x) \partial_\mu \epsilon(x) \tag{8.1.7}$$

**ここでは場の変換行列を対角としているので, 場の添字について和をとる規約を使うのは不便だ. よって, (8.1.6) では ℓ についての和はとらない.

と変化せねばならない. 物質場が場の方程式を満たすとき, 物質場の作用は Ψ_ℓ のどんな変分のもとでも停留している. したがって, このときには (8.1.7) もゼロにならなければならず,

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{8.1.8}$$

となる. とくに, 7.3 節では, I_M が Ψ^ℓ と $\partial_\mu \Psi^\ell$ の関数 $\mathcal{L}_M$ の積分であれば, 保存カレントは,

$$J^\mu = -i \sum_\ell \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \Psi^\ell)} q_\ell \Psi^\ell$$

で与えられることを見た.† これは, 変換 (8.1.6) を引き起こして,

$$[Q\,,\, \Psi^\ell(x)] = -q_\ell \Psi^\ell(x) \tag{8.1.9}$$

となる. ここで Q は時刻に依存しない電荷演算子,

$$Q = \int d^3x\, J^0 \tag{8.1.10}$$

だ. したがって, $\delta I_M / \delta A_\mu(x)$ を $J_\mu(x)$ に比例するようにして, ベクトル場 $A_\mu(x)$ を保存カレント $J_\mu(x)$ に結合させることで, ローレンツ不変な理論を構成できる. 比例係数は, 電荷 q_ℓ の全部に共通な大きさの定義に吸収できるので, これらの量を単に等しいととればよい.

$$\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} = J^\mu(x)\,. \tag{8.1.11}$$

電荷の保存則では, 単に全ての電荷をその内のどれか一つの電荷の値, 通常電子の電荷 $-e$, を使って決めることしかできない. しかし, (8.1.11) は e の値そのものに明確な意味を与える.‡

---

†ここで, Ψ^ℓ は $A_\mu(x)$ 以外の独立な全ての場についてとる. 大文字の Ψ はハイゼンベルグ表示の場を意味し, 時間依存性は相互作用の効果も含む. もちろん, Ψ^ℓ を状態ベクトル, つまり, 波動関数と混乱してはいけない.

‡もちろん, (8.1.11) は $A_\mu(x)$ をどう規格化するかを決めてはじめて e の定義となる. この電磁場の規格化については 10.4 節でとりあげる.

(8.1.11) の要請は不変性の原理としていいかえることができる.[1a] すなわち, 物質場の作用は以下の同時変換のもとで不変だ.

$$\delta\ A_\mu(x) = \partial_\mu \epsilon(x)\ , \tag{8.1.12}$$

$$\delta\ \Psi_\ell\ (x) = i\epsilon(x) q_\ell \Psi_\ell(x)\ . \tag{8.1.13}$$

任意の関数 $\epsilon(x)$ を含むこのタイプの対称性は**局所対称性** (local symmetry), または, 第 2 種のゲージ不変性と呼ばれる. それに対して, 定数の ϵ のもとでの対称性は, **大域的対称性** (global symmetry), または, 第 1 種のゲージ不変性と呼ばれる. 局所対称性については, 幾つかの厳密に成立するものが現在知られているが, 純粋に大域的な対称性は, 偶然に他の原理で保証されているもの以外は無いように思われる (12.5 節参照).

ここまでは, 光子自身の作用については何も述べていない. 予測としては, 質量がゼロでないベクトル場で $m = 0$ としたもの,

$$I_\gamma = -\tfrac{1}{4}\int d^4x\ F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{8.1.14}$$

と同じと考えられる. これは, 古典電磁理論と同じ作用だが, これが本当に正当化されるのは, これが (定数を除いて) 唯一の, $F_{\mu\nu}(x)$ の 2 次で高階微分を持たないゲージ不変な汎関数だからだ. また, 次節で見るように, これは矛盾の無い量子論に導く. もし, 作用に $F_{\mu\nu}(x)$ の高階微分や高次の項があれば, これらはいわゆる物質場の作用に含めて考える. (8.1.11) と (8.1.14) を使えば, 電磁理論の場の方程式が,

$$0 = \frac{\delta}{\delta A_\nu}\left[I_\gamma + I_M\right] = \partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\nu \tag{8.1.15}$$

となることがわかる. これらは, 電流 J^ν のもとでの通常の非斉次マックスウェル方程式になっている. また, 他の斉次マックスウェル方程式,

$$0 = \partial_\mu F_{\nu\epsilon} + \partial_\epsilon F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\epsilon\mu} \tag{8.1.16}$$

は $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ の定義から直接に導かれる.

以上の議論では, 我々はスピン 1 の質量ゼロの粒子が存在することから出発して, 物質場の作用が局所ゲージ変換 (8.1.12) と (8.1.13) のもとで不変であることを導いた. 通常の議論では, この導出は逆に行なわれる. つまり, まず大域的内部対称性,

$$\delta\Psi^\ell(x) = i\,\epsilon\, q^\ell \Psi^\ell(x) \tag{8.1.17}$$

から出発して, これを局所的な対称性,

$$\delta\Psi^\ell(x) = i\,\epsilon(x) q_\ell \Psi^\ell(x) \tag{8.1.18}$$

に格上げするにはどうしたらよいか考える. もし, ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ が場 $\Psi^\ell(x)$ にのみ依り, その微分に依らなければ, ϵ が定数であるかないかは関係ない. つまり, ϵ が定数のときに不変であれば, ϵ が時空の位置の関数であっても不変性がなりたつ. しかし, どんな現実的なラグランジアンも場の微分を含むので, 場の微分は,

$$\delta\,\partial_\mu \Psi^\ell(x) = i\,\epsilon(x) q_\ell \partial_\mu \Psi^\ell(x) + i\, q_\ell \Psi^\ell(x) \partial_\mu \epsilon(x) \tag{8.1.19}$$

のように場と異なる変換を受けることが問題となる. この第 2 項を消すために我々は次の変換則にしたがうベクトル場 $A_\mu(x)$ を「発明」する.

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \epsilon(x)\ . \tag{8.1.20}$$

そして, ラグランジアン密度が次の組合せ,

$$D_\mu \Psi^\ell \equiv \partial_\mu \Psi^\ell - i q_\ell A_\mu \Psi^\ell \tag{8.1.21}$$

を通じてのみ $\partial_\mu \Psi^\ell$ と $A_\mu(x)$ に依存することを要求する. この組合せは, Ψ^ℓ と同じように,

$$\delta\ D_\mu \Psi^\ell(x) = i\epsilon(x) q_\ell D_\mu \Psi^\ell(x) \tag{8.1.22}$$

と変換する. 物質場の作用 $\mathcal{L}_M(\Psi, D\Psi)$ が Ψ^ℓ と $D_\mu\Psi^\ell$ のみでできていて ϵ が一定の (8.1.17) のもとで不変ならば, この作用は任意の関数 $\epsilon(x)$ を用いた変換 (8.1.18) と (8.1.20) のもとで不変だ. このようなラグランジアンについては,

$$\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu} = \sum_\ell \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial D_\mu \Psi^\ell}(-iq_\ell \Psi^\ell) = -i\sum_\ell \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu \Psi^\ell} q_\ell \Psi^\ell$$

が成り立つ. これは (8.1.11) になっている. (ここで $F_{\mu\nu}(x)$ とその微分も $\mathcal{L}_M$ に含めることができる.) つまり, $-\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$ をラグランジアンに入れるとゲージ不変性が破られるので, この観点からは, $A_\mu(x)$ で記述される粒子が質量を持たないのは仮定ではなく, ゲージ不変性の帰結だといえる.

8.2 拘束条件とゲージ条件

前章で質量がゼロでない粒子の様々な理論を量子化したが, 電磁理論を同様に量子化するには, それを阻む幾つかの問題がある. 電磁ベクトルポテンシャルに正準共役な運動量を,

$$\Pi^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \tag{8.2.1}$$

と定義する. 通常のやり方で量子化するとすれば,

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)] = i\delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

を要求することになる. しかし, A_μ と Π^ν が幾つかの拘束条件に従うために, これは不可能だ.

最初の拘束条件は, ラグランジアンが A_0 の時間微分を含まないことによる.* つまり,

$$\Pi^0(x) = 0 \tag{8.2.2}$$

---

*$\mathcal{L}_\gamma = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ より, $\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_o A_\mu) = -F^{0\mu}$ だが, これは $F_{\mu\nu}$ の反対称性よ

だ. これは, 直接にラグランジアンの構造から導かれるので, **第 1 次拘束条件**だ. 第 1 次拘束条件で固定された量に場の方程式を適用して得られる条件も,

$$\partial_i \Pi^i = -\partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{i0}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = -J^0 \tag{8.2.3}$$

のように存在し, これは**第 2 次拘束条件**だ.** ここで, 時間微分項は $F_{00}=0$ のために消えている. 物質場のラグランジアンは一般に A^0 に依存するが, 電荷密度は,

$$J^0 = -i \sum_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Psi^\ell)} q_\ell \Psi^\ell = -i \sum_n P_n q_n Q^n \tag{8.2.4}$$

のように正準物質場 Q^n とその正準共役場 P_n にのみ依る.† したがって, (8.2.3) は正準変数の間の関数関係を与えている. (8.2.2) と (8.2.3) は双方とも, 通常の仮定, $[A_\mu(\mathbf{x},t), \Pi^\nu(\mathbf{y},t)] = i\delta^\nu_\mu \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ および $[Q^n(\mathbf{x},t), \Pi^\nu(\mathbf{y},t)] = [P_n(\mathbf{x},t), \Pi^\nu(\mathbf{y},t)] = 0$ に矛盾する.

質量がゼロでないベクトル場の理論でも類似の問題に出会った. その場合は, これに二つの同等な対処法があった. その一つは, ディラック括弧の方法であり, もう一つはもっと直接的に A_i と Π^i のみを正準変数として扱い, (8.2.3) に対応するものを解いて A_0 をこれらの変数で表す方法だ. ここではディラックの方法が使えないことは明らかだ. なぜなら, 拘束関数 χ は, ($\partial_i \Pi_i - m^2 A^0 - J^0$ ではなく) Π^0 と $\partial_i \Pi_i - J^0$ であり, これらのポアッソン括弧は明らかにゼロだからだ. ディラックの用語を使って述べれば, 拘束条件 (8.2.2) と (8.2.3) は第

り, $\mu=0$ で消える. 物質場のラグランジアン $\mathcal{L}$ が Ψ^ℓ と $D_\mu \Psi^\ell$ のみを含むときは, (8.1.21) により $\mathcal{L}_M$ には A^ν の微分は含まれないので, この事情は変わらない. 物質場のラグランジアンが $F_{\mu\nu}$ に依るときでも, $\partial \mathcal{L}_M / \partial(\partial_\nu A_\mu)$ はやはり μ と ν について反対称であり, $\mu=\nu=0$ で消える.

**通常のように i, j などは 1,2,3 の値をとる.

†アルファベットの記号を使いきってしまったので, ここでは前の章と異なる記法をとらざるを得ない. 記号 Q^n と P_n はそれぞれ, 正準物質場とその正準共役場に使い, 正準電磁ポテンシャルと正準共役場をそれぞれ A_i と Π_i とあらわすことにする.

1 類だ. また, A^0 を他の変数を使って力学的な変数でなくしてしまうこともできない. (8.2.3) は A^0 をすべての時刻で与えるのではなく, 単なる初期条件にしかすぎない. もし (8.2.3) がある時刻で満たされていれば, 全ての時刻でみたされている. なぜなら (他の A_i の場の方程式を使って),

$$\partial_0\left[\partial_i\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{i0}}-J^0\right]=-\partial_i\partial_0\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{0i}}-\partial_0 J^0$$
$$=+\,\partial_i\partial_j\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{ji}}-\partial_i J_i-\partial_0 J^0$$

であり, カレントの保存則より,

$$\partial_0\left[\partial_i\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{i0}}-J^0\right]=0 \tag{8.2.5}$$

となるからだ. 場の方程式が 3 つしか無いのに, A^μ が 4 つ残ってしまうことは驚くにはあたらない. これは, 理論に局所ゲージ不変性があり, 原則として, 任意の時刻の場の値を別の時刻の場の値とその変化率を使って決定することができないからだ. 場の方程式の解 $A_\mu(\mathbf{x},t)$ が与えられたとき, $t=0$ で同じ値と同じ時間微分を持つが後の時刻では違う値を持つ別の解 $A_\mu(\mathbf{x},t)+\partial_\mu\epsilon(\mathbf{x},t)$ を見つけることができる. (ϵ を $t=0$ で 1 次微分と 2 次微分がゼロになるように選べばよい.)

この $A_\mu(\mathbf{x},t)$ の部分的な任意性のために, 正準量子化を直接に A_μ (もしくは, 質量がゼロでないときのように $\mathbf{A}$) に適用することはできない. この困難を解決するための様々なアプローチのうち, 特に役に立つものが二つある. そのうちの一つは 3 巻で述べる現代的なローレンツ不変な BRST 量子化の方法だ. ここではもう一つの方法をとって, 理論のゲージ不変な性質を使い「ゲージを選ぶ」ことをする. つまり, 有限のゲージ変換,

$$A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\partial_\mu\lambda(x)\,,\qquad \Psi_\ell(x)\to\exp\Big(iq_\ell\lambda(x)\Big)\Psi_\ell(x)$$

をして, $A_\mu(x)$ に正準量子化が適用できるような条件を課すのだ. 様々な応用にとって有用な様々なゲージ条件が知られている.‡

ローレンツ (または, ランダウ)・ゲージ:	$\partial_\mu A^\mu = 0$
クーロン・ゲージ:	$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$
時間的ゲージ:	$A^0 = 0$
軸性ゲージ:	$A^3 = 0$
ユニタリー・ゲージ:	Φ が実 .

正準量子化は軸性ゲージとクーロン・ゲージのときにもっとも簡単にできる. もちろん, クーロン・ゲージでは軸性ゲージと異なって空間の回転不変性が明白に保たれているので, ここではクーロン・ゲージを採用する.[2]

このゲージ条件は, もし A_μ がクーロン・ゲージ条件を満たさなければ, $\nabla^2\lambda = -\nabla \cdot \mathbf{A}$ を満たす λ でゲージ変換した場 $A^\mu + \partial^\mu\lambda$ がクーロン・ゲージ条件を満たすことから可能になっている. これ以降, この変換がなされて,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{8.2.6}$$

が満たされているものとして話を進める.

以下では便利なように, 物質場のラグランジアン $\mathcal{L}_M$ が物質場とその時間微分, 及び A^μ にのみ依存し, A^μ の微分には依存しない場合に限って考える. (スカラー場とディラック場の標準的な電磁理論ではラグランジアンはこの形になっている.) このとき, ラグランジアンで $F_{\mu\nu}$ に依存するのは運動項 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ のみだ. したがって拘束条件 (8.2.3) は,

$$-\ \partial_i F^{i0} = J^0 \tag{8.2.7}$$

---

‡ここで, Φ は $q \neq 0$ のどんな複素スカラー場をも表わす. このゲージ条件は, ゲージ対称性が Φ のゼロでない真空期待値のために自発的に破れるときに使われる.

となる. クーロン・ゲージ条件 (8.2.6) を使うと, これより,

$$-\nabla^2 A^0 = J^0 \tag{8.2.8}$$

がでる. これを解くと,

$$A^0(\mathbf{x}, t) = \int d^3y \, \frac{J^0(\mathbf{y}, t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \tag{8.2.9}$$

となる. 残りの自由度は A^i $(i = 1, 2, 3)$ であり, ゲージ条件 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$ を満たす.

前に述べたように, 電荷密度は正準物質場 Q^n と P_n にのみ依るので, (8.2.9) は補助場 A^0 の陽な解になっている.

8.3 クーロン・ゲージでの量子化

クーロン・ゲージでも電磁理論の正準量子化にはまだ障害がある. (8.2.9) を使って正準変数から A^0 (と Π_0) を消去した後でも, A^i と Π_i に通常の正準交換関係を課すことはできない. なぜならこれらの変数にまだ拘束条件が残っているからだ.* その一つは, クーロン・ゲージ条件,

$$\chi_{1\mathbf{x}} \equiv \partial_i A^i(\mathbf{x}) = 0 \tag{8.3.1}$$

だ. もう一つは, 第 2 次拘束条件 (8.2.3) であり, これは,

$$\chi_{2\mathbf{x}} \equiv \partial_i \Pi^i(\mathbf{x}) + J^0(\mathbf{x}) = 0 \tag{8.3.2}$$

で与えられる. このどちらの拘束条件も通常の交換関係 $[A_i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = i\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ と矛盾する. これは, 右辺に $\partial/\partial x^i$ を施しても, $\partial/\partial y^j$ を施してもゼロにならないからだ.

---

*この節では i, j 等は 1, 2, 3 の値をとる. また, 全ての演算子は同じ時刻でのものとし, 時間変数を省略する.

これらの拘束条件は第 2 類であり, これらの交換関係に対しては 7.6 節に述べたようにごく一般的な処方箋が知られている. 拘束関数の間のポアッソン括弧は以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
&C_{1\mathbf{x},2\mathbf{y}} = -C_{2\mathbf{y},1\mathbf{x}} \equiv [\chi_{1\mathbf{x}}, \chi_{2\mathbf{y}}]_{\mathrm{P}} = -\nabla^2 \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \, , \\
&C_{1\mathbf{x},1\mathbf{y}} \equiv [\chi_{1\mathbf{x}}, \chi_{1\mathbf{y}}]_{\mathrm{P}} = 0 \, , \\
&C_{2\mathbf{x},2\mathbf{y}} \equiv [\chi_{2\mathbf{x}}, \chi_{2\mathbf{y}}]_{\mathrm{P}} = 0 \, .
\end{aligned} \tag{8.3.3}
$$

ここで, ポアッソン括弧は任意の汎関数 U と V に対して,

$$
[U, V]_{\mathrm{P}} \equiv \int d^3x \left[\frac{\delta U}{\delta A^i(\mathbf{x})} \frac{\delta V}{\delta \Pi_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta V}{\delta A^i(\mathbf{x})} \frac{\delta U}{\delta \Pi_i(\mathbf{x})} \right]
$$

だ. 「行列」 C_{MN} は特異ではなく, 第 2 類拘束条件の定義に合っている. また, 場の変数 A^i は独立な正準変数を使って表せる. 例えば, 独立変数として $Q_{1\mathbf{x}} = A^1(\mathbf{x})$ と $Q_{2\mathbf{x}} = A^2(\mathbf{x})$ をとり, A^3 を (8.3.1) の解として,

$$
A^3(\mathbf{x}) = -\int^{x^3} ds \, [\partial_1 A^1(x^1, x^2, s) + \partial_2 A^2(x^1, x^2, s)]
$$

と表すことができる. (8.3.2) を使えば, A^i と正準共役な Π_i も同様に $Q_{1\mathbf{x}}$ と $Q_{2\mathbf{x}}$ に共役な $P_{1\mathbf{x}}$ と $P_{2\mathbf{x}}$ を使って表すことができる. 前の章の補遺 B によれば, もし独立変数 $Q_{1\mathbf{x}}$, $Q_{2\mathbf{x}}$, $P_{1\mathbf{x}}$, $P_{2\mathbf{x}}$ が通常の交換関係を満たすならば, 拘束条件にしたがう変数およびその正準共役量の交換関係は (i を除いて) ディラック括弧 (7.6.20) で与えられる. この処方には従属変数を独立変数で陽に書き表す必要が無いという大きな利点がある.

ディラック括弧を計算するには, 行列 C の逆が,

$$
\begin{aligned}
(C^{-1})_{1\mathbf{x},2\mathbf{y}} &= -(C^{-1})_{2\mathbf{y},1\mathbf{x}} \\
&= -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\mathbf{k}^2} = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \, , \\
(C^{-1})_{1\mathbf{x},1\mathbf{y}} &= (C^{-1})_{2\mathbf{x},2\mathbf{y}} = 0
\end{aligned} \tag{8.3.4}
$$

で表されることを使う. また, A^i, Π_i と拘束関数とのポアッソン括弧でゼロでないものは,

$$[A^i(\mathbf{x}), \chi_{2\mathbf{y}}]_{\mathrm{P}} = -\frac{\partial}{\partial x^i}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

と

$$[\Pi_i(\mathbf{x}), \chi_{1\mathbf{y}}]_{\mathrm{P}} = +\frac{\partial}{\partial x^i}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

だ. したがって, (7.6.19) と (7.6.20) を使うと, 同時刻交換関係は以下のようになる.

$$\begin{aligned} \left[A^i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})\right] &= i\delta^i_j\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + i\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}\left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right) , \\ \left[A^i(\mathbf{x})\,,\, A^j(\mathbf{y})\right] &= [\Pi_i(\mathbf{x})\,,\, \Pi_j(\mathbf{y})] = 0 \,. \end{aligned} \tag{8.3.5}$$

ここで, ディラック括弧の一般的性質が保証しているように, これらがクーロン・ゲージ条件 (8.3.1) と (8.3.2) に矛盾しないことに注意しておく.

さて, $\mathbf{\Pi}$ は電磁理論では何になっているだろうか? 前節で述べた, ラグランジアンのなかで運動エネルギー項 $-1/4\int d^3x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ のみが $\dot{\mathbf{A}}$ に依存するような理論では, 拘束条件 $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ を気にせずに $\dot{\mathbf{A}}$ についてラグランジアンの変分をとると,

$$\Pi_j = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}^j(\mathbf{x})} = \dot{A}^j(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x^j}A^0(\mathbf{x}) \tag{8.3.6}$$

が得られる. しかし, $\mathbf{A}$ を $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=0$ によって拘束すると, $\dot{\mathbf{A}}$ に関する変分はよく定義できない. もし, $\dot{\mathbf{A}}$ を $\delta\dot{\mathbf{A}}$ だけ変化させたときの L の変分が $\delta L = \int d^3x \mathcal{P}\cdot\delta\dot{\mathbf{A}}$ ならば, $\nabla\cdot\delta\dot{\mathbf{A}}=0$ なので, 任意のスカラー関数 $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ についても $\delta L = \int d^3x[\mathcal{P}+\nabla\mathcal{F}]\cdot\delta\dot{\mathbf{A}}$ でなければならない. したがって, ラグランジアンからは $\mathbf{\Pi}$ は $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\nabla}A^0(\mathbf{x})$ にあるスカラー関数の勾配を加えたものだということしかわからない. こ

の任意性は, (8.3.2) の条件より $\nabla\cdot\mathbf{\Pi} = -J^0 = \nabla^2 A^0$ であることを使うと除かれる. $\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}} = 0$ だから, (8.3.6) が実際に Π^i の正しい形を与えていることがわかる.

(8.3.5) の交換関係は十分単純に見えるが, $\mathbf{\Pi}$ が物質場およびその正準共役場と可換でないという点で多少複雑になっている. いま, F をこれらの物質場の自由度の任意の汎関数とすると, その $\mathbf{A}$ とのディラック括弧はゼロだ. しかし, $\mathbf{\Pi}$ とのディラック括弧は,

$$\begin{aligned}
[F, \mathbf{\Pi}(\mathbf{z})]_{\mathrm{D}} &= -\int d^3x\, d^3y\, [F, \chi_{2\mathbf{x}}]_{\mathrm{P}} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}[\chi_{1\mathbf{y}}, \mathbf{\Pi}(\mathbf{z})]_{\mathrm{P}} \\
&= -\int d^3x\, d^3y\, [F, J^0(\mathbf{x})]_{\mathrm{P}} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \nabla\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{z}) \\
&= -\int d^3y\, [F, A^0(\mathbf{y})]_{\mathrm{P}} \nabla\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{z}) \\
&= [F, \nabla A^0(\mathbf{z})]_{\mathrm{P}} = [F, \nabla A^0(\mathbf{z})]_{\mathrm{D}}
\end{aligned}$$

となる. 相互作用表示に移るためには, ハミルトニアンを $\mathbf{A}$ と $\mathbf{\Pi}$ で表す代わりに, $\mathbf{A}$ と $\mathbf{\Pi}_\perp$ で書き下す. ここで, $\mathbf{\Pi}_\perp$ は $\mathbf{\Pi}$ のソレノイド部分, または横成分だ.

$$\mathbf{\Pi}_\perp \equiv \mathbf{\Pi} - \nabla A^0 = \dot{\mathbf{A}}\,. \tag{8.3.7}$$

この量は, $[F, \mathbf{\Pi}_\perp(\mathbf{z})] = 0$ を満たす. $\mathbf{\Pi}_\perp(\mathbf{x})$ が$\mathbf{\Pi}(\mathbf{y}) - \mathbf{\Pi}_\perp(\mathbf{y}) = \nabla A^0(\mathbf{y})$ と可換であることと, $\partial_i A^0(\mathbf{x})$ が$\partial_j A^0(\mathbf{y})$ と可換であることを使うと, $\mathbf{\Pi}_\perp(\mathbf{x})$ が $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x})$ と同じ (8.3.5) の交換関係と, 単純な拘束条件,

$$\nabla\cdot\mathbf{\Pi}_\perp = 0 \tag{8.3.8}$$

を満たすことがわかる.

次にハミルトニアンを構成しなければならない. 7 章の補遺の一般的な結果によれば, 最初に拘束されていない Q や P を使ってハミルトニアンを書き下さなくても, 拘束された変数 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{\Pi}_\perp$ を使えばハ

ミルトニアンとラグランジアンの間の通常の関係式を適用できる. 電磁理論では, これにより,

$$H = \int d^3x \left[\Pi_{\perp i}\dot{A}^i + P_n\dot{Q}^n - \mathcal{L}\right] \tag{8.3.9}$$

となる. ここで, 前にのべたように Q^n と P_n は正準物質場とその正準共役場だ. ($\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ により, (8.3.9) では $\mathbf{\Pi}$ の代わりに $\mathbf{\Pi}_\perp(\mathbf{x})$ を使うことができる.)

話を具体的にするために, ラグランジアン密度が以下の理論を考える.

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \; + \; J_\mu \, A^\mu \; + \; \mathcal{L}_{\text{matter}} \, . \tag{8.3.10}$$

ここで, J_μ は A^μ を含まないカレントであり, $\mathcal{L}_{\text{matter}}$ は J^μ に現れる全ての物質場のラグランジアンだ. ただし, それらの物質場の電磁相互作用は (8.3.10) の中の $J_\mu A^\mu$ にのみ含まれていて $\mathcal{L}_{\text{matter}}$ には含まれていないとする. (スピン $\frac{1}{2}$ の粒子のラグランジアンは上の形をしているが, スピン・ゼロの粒子の電磁理論はもっと込み入っている.) $\dot{\mathbf{A}}$ を全て $\mathbf{\Pi}_\perp(\mathbf{x})$ で置き換えると, ハミルトニアン (8.3.9) が以下の形に求まる.

$$H = \int d^3x \; \left[\mathbf{\Pi}_\perp^2 + \tfrac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{A})^2 - \tfrac{1}{2}(\mathbf{\Pi}_\perp + \nabla A^0)^2 - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A} + J^0A^0\right]$$
$$+H_{\text{M}} \, .$$

ここで, H_{M} は物質場のハミルトニアンから電磁相互作用を除いたものだ.

$$H_{\text{M}} \equiv \int d^3x \; (P_n\dot{Q}^n - \mathcal{L}_{\text{matter}}) \, .$$

A^0 の解 (8.2.9) を使うと, これは,

$$H = \int d^3x \left[\tfrac{1}{2}\mathbf{\Pi}_\perp^2 + \tfrac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{A})^2 - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A} + \tfrac{1}{2}J^0A^0\right] + H_{\text{M}} \tag{8.3.11}$$

となる. $\frac{1}{2}J^0A^0$ の項は一見変わって見えるが, これは, よく知られたクーロン・エネルギーに他ならない.

$$V_{\text{Coul}} = \tfrac{1}{2}\int d^3x\ J^0\ A^0$$
$$= \tfrac{1}{2}\int d^3x \int d^3y \frac{J^0(\mathbf{x})J^0(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\ . \qquad (8.3.12)$$

読者には, (8.3.5) の交換関係を使って $\mathbf{A}$ と $\mathbf{\Pi}$ のどんな演算子関数 F の時間変化も, 当然の関係 $i\dot{F} = [F, H]$ により与えられることを確認してほしい.

8.4 相互作用表示での電磁理論

(8.3.11) のハミルトニアンを自由粒子の部分 H_0 と相互作用部分 V に分ける.

$$H = H_0\ +\ V\ , \qquad (8.4.1)$$
$$H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\mathbf{\Pi}_\perp^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{\nabla}\times\mathbf{A})^2\right] + H_{\text{matter},0}\ , \qquad (8.4.2)$$
$$V = -\int d^3x\ \mathbf{J}\cdot\mathbf{A} + V_{\text{Coul}} + V_{\text{matter}}\ . \qquad (8.4.3)$$

ここで, $H_{\text{matter},0}$ と V_{matter} は, H_{matter} の自由な部分と相互作用部分であり, V_{Coul} は (8.3.12) のクーロン相互作用だ. (8.4.1) の全ハミルトニアンは時刻に依存せず, よって (8.4.2) と (8.4.3) は (両方を同じ時刻で求める限り) 任意の時刻, 特に, $t=0$ で計算してもよい. 7 章のように, 相互作用表示への変換は, 相似変換,

$$V(t) = \exp(iH_0t)\ V[\mathbf{A}\,,\, \mathbf{\Pi}_\perp\,,\, Q\,,\, P]_{t=0}\ \exp(-iH_0t)$$
$$= V\left[\mathbf{a}(t),\ \boldsymbol{\pi}(t),\ q(t),\ p(t)\right] \qquad (8.4.4)$$

を使って行う. (ここで, $\boldsymbol{\pi}(x)$ の添字 $\perp$ を省略した.) P は物質場 Q の正準共役場だ. 相互作用表示では, 任意の演算子 $o(\mathbf{x}, t)$ はハイゼンベ

ルグ表示での $t=0$ の値 $O(\mathbf{x},t)$ と次のように関係している.

$$o(\mathbf{x},t) = \exp(iH_0t)\ O(\mathbf{x},0)\ \exp(-iH_0t)\,. \tag{8.4.5}$$

このため,

$$i\ \dot{o}(\mathbf{x},t) = [o(\mathbf{x},t), H_0] \tag{8.4.6}$$

が成立する. (8.4.5) は相似変換だから, 同時刻交換関係はハイゼンベルグ表示と同じで,

$$\left[a^i(\mathbf{x},t), \pi^j(\mathbf{y},t)\right] = i\left[\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right], \tag{8.4.7}$$

$$\left[a^i(\mathbf{x},t), a^j(\mathbf{y},t)\right] = 0, \tag{8.4.8}$$

$$\left[\pi^i(\mathbf{x},t), \pi^j(\mathbf{y},t)\right] = 0 \tag{8.4.9}$$

となる. また, 物質場とその正準共役場についても同じだ. 同じ理由で, (8.2.6) と (8.3.8) の拘束条件も以下のとおり成立する.

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a} = 0\,, \tag{8.4.10}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\pi} = 0\,. \tag{8.4.11}$$

$\boldsymbol{\pi}$ と $\dot{\mathbf{a}}$ の関係を調べるために, (8.4.6) を使って, $\dot{\mathbf{a}}$ を求める.

$$\begin{aligned} i\dot{a}_i(\mathbf{x},t) &= [a_i(\mathbf{x},t), H_0] \\ &= i\int d^3y\ \left[\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right]\ \pi_j(\mathbf{y},t)\,. \end{aligned}$$

第 2 項の $\partial/\partial x^j$ を $-\partial/\partial y^j$ に置き換えて, 部分積分し, (8.4.11) を使うと,

$$\dot{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\pi} \tag{8.4.12}$$

を得る. これはハイゼンベルグ表示のときと同じだ. 同様に場の方程式は,

$$i\dot{\pi}_i(\mathbf{x},t) = [\pi_i(\mathbf{x},t), H_0]$$

$$= -i \int d^3y \left[\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right] \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}(\mathbf{y},t))_j$$

から決まるが, これは, (8.4.10) と (8.4.12) を使うと通常の波動方程式,

$$\Box\, \mathbf{a} = 0 \tag{8.4.13}$$

となる. A^0 は独立なハイゼンベルグ表示の場の変数ではなく, (8.2.9) で与えられる物質場とその共役場の汎関数で, 電荷がゼロの極限で消える. したがって, 相互作用表示ではそれに対応する演算子 a^0 は導入せずに,

$$a^0 = 0 \tag{8.4.14}$$

とする.

(8.4.10), (8.4.13), (8.4.14) の最も一般的な実解は,

$$a^\mu(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \sum_\sigma \Big[e^{ip\cdot x} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\ a(\mathbf{p},\sigma) + e^{-ip\cdot x} e^{\mu *}(\mathbf{p},\sigma)\ a^\dagger(\mathbf{p},\sigma) \Big] \tag{8.4.15}$$

と書ける. ここで, $p^0 \equiv |\mathbf{p}|$ であり, $\epsilon^\mu(\mathbf{p},\sigma)$ は次の式を満たす二つの独立な「偏極ベクトル」だ.

$$\mathbf{p} \cdot\ \mathbf{e}(\mathbf{p},\sigma) = 0\,, \tag{8.4.16}$$

$$e^0(\mathbf{p},\sigma) = 0\,. \tag{8.4.17}$$

また, 係数 $a(\mathbf{p},\sigma)$ は σ の二つの値に対応した 1 対の演算子だ. $a(\mathbf{p},\sigma)$ の大きさを調整して $\epsilon^\mu(\mathbf{p},\sigma)$ を規格化し, 完全性の関係式が,

$$\sum_\sigma e^i(\mathbf{p},\sigma) e^j(\mathbf{p},\sigma)^* = \delta_{ij} - p_i\, p_j/|\mathbf{p}|^2 \tag{8.4.18}$$

となるようにできる. $\mathbf{e}(\mathbf{p}.\sigma)$ は, 例えば, 5.9 節で使った偏極ベクトルと同じにとることができる.

$$e^\mu(\mathbf{p},\pm 1) = R(\hat{\mathbf{p}}) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm i/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{8.4.19}$$

ここで, $R(\hat{\mathbf{p}})$ は 3 軸を $\mathbf{p}$ 方向へ回す標準的な回転行列だ. もし (8.4.15) の演算子係数が,

$$\left[a(\mathbf{p},\sigma),\ a^\dagger(\mathbf{p}\,',\sigma')\right] = \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}\,')\ \delta_{\sigma\sigma'}, \tag{8.4.20}$$

$$[a(\mathbf{p},\sigma),\ a(\mathbf{p}\,',\sigma')] = 0 \tag{8.4.21}$$

を満たせば (実際はこのときに限り), (8.4.18) と (8.4.12) を使って, 交換関係 (8.4.7)-(8.4.9) が成立することが簡単に示せる. 質量がゼロでない粒子について前述したように, これは (8.4.20) と (8.4.21) を別の仕方で導いたというよりは, (8.4.2) が質量ゼロのヘリシティ ±1 の自由粒子の正しいハミルトニアンであることを確認したという方が正しい. 同じ意味で, (8.4.12) と (8.4.15) を (8.4.2) に使って, 自由な光子のハミルトニアンが,

$$\begin{aligned} H_0 &= \int d^3p \sum_\sigma \tfrac{1}{2}p^0 \left[a(\mathbf{p},\sigma)\,,\, a^\dagger(\mathbf{p},\sigma\right]_+ \\ &= \int d^3p \sum_\sigma p^0\ \left(a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)a(\mathbf{p},\sigma) + \tfrac{1}{2}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p})\right) \end{aligned} \tag{8.4.22}$$

であることを導ける. これは (無限大の無意味な c 数の項を除いて) ちょうど期待する結果になっている.

最後に, (8.4.4) の相互作用が相互作用表示では,

$$V(t) = -\int d^3x\ j_\mu(\mathbf{x},t)\ a^\mu(\mathbf{x},t) + V_{\text{Coul}}(t) + V_{\text{matter}}(t) \tag{8.4.23}$$

となることを見ておく．ここで，ハイゼンベルグ表示でのカレント J を使うと，

$$j_\mu(\mathbf{x}, t) \equiv \exp(iH_0 t)\ J_\mu(\mathbf{x}, 0) \exp(-iH_0 t) \tag{8.4.24}$$

であり，$V_{\text{Coul}}(t)$ はクーロン項，

$$\begin{aligned} V_{\text{Coul}}(t) &= \exp(iH_0 t) V_{\text{Coul}} \exp(-iH_0 t) \\ &= \tfrac{1}{2} \int d^3x\ d^3y\ \frac{j^0(\mathbf{x}, t) j^0(\mathbf{y}, t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \end{aligned} \tag{8.4.25}$$

だ．また，V_{matter} は相互作用表示での物質場の非電磁的相互作用，

$$V_{\text{matter}}(t) = \exp(iH_0 t)\ V_{\text{matter}} \exp(-iH_0 t) \tag{8.4.26}$$

だ．(8.4.23) では $\mathbf{j} \cdot \mathbf{a}$ の代わりに $j_\mu a^\mu$ と書いたが，a^μ において $a^0 = 0$ と定義されているので，これらは同等だ．

8.5 光子のプロパゲーター

6 節で述べた一般的なファインマン則によれば，ファインマン・ダイアグラムの光子の内線は，S 行列の対応する項にプロパゲーター，

$$-i\Delta_{\mu\nu}(x - y) \equiv (\Phi_{\text{VAC}}, T\left\{a_\mu(x), a_\nu(y)\right\} \Phi_{\text{VAC}}) \tag{8.5.1}$$

の因子を生じる．ここで，T は通常の時間順序積を意味する．我々が導いた (8.4.15) の電磁ポテンシャルを代入すると，

$$\begin{aligned} -i\Delta_{\mu\nu}(x - y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}|} P_{\mu\nu}(\mathbf{p}) \\ &\quad \times \left[e^{ip\cdot(x-y)}\theta(x - y) + e^{ip\cdot(y-x)}\theta(y - x)\right] \end{aligned} \tag{8.5.2}$$

を得る．ここで，

$$P_{\mu\nu}(\mathbf{p}) \equiv \sum_{\sigma=\pm 1} e_\mu(\mathbf{p}, \sigma)\, e_\nu(\mathbf{p}, \sigma)^* \tag{8.5.3}$$

であり，また，指数関数の中の p^μ は $p^0 = |\mathbf{p}|$ ととる．(8.4.18) と (8.4.17) より，

$$
\begin{aligned}
P_{ij}(\mathbf{p}) &= \delta_{ij} - \frac{p^i p^j}{|\mathbf{p}|^2}\,, \\
P_{0i}(\mathbf{p}) &= P_{i0}(\mathbf{p}) = P_{00}(\mathbf{p}) = 0
\end{aligned}
\tag{8.5.4}
$$

が成立することを思い出そう．6 章で見たように，(8.5.2) の階段関数は，質量殻からはずれた (off-shell) 4 元運動量 q^μ の独立な時間成分 q^0 についての積分に書ける．これより，(8.5.2) は，

$$
\Delta_{\mu\nu}(x-y) = (2\pi)^{-4} \int d^4q\, \frac{P_{\mu\nu}(\mathbf{q})}{q^2 - i\epsilon}\, e^{iq\cdot(x-y)} \tag{8.5.5}
$$

と書き換えることができる．したがって，運動量空間でのファインマン則を使うと，光子が a^μ で生成され a^ν で消滅する頂点間を走るときの 4 元運動量 q を持つ内線の寄与は，

$$
\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{P_{\mu\nu}(\mathbf{q})}{q^2 - i\epsilon} \tag{8.5.6}
$$

で与えられる．

(8.5.4) を (ちょっとひねくれてはいるが) 以下のように書くと便利だ．

$$
P_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = \eta_{\mu\nu} + \frac{q^0 q_\mu n_\nu + q^0 q_\nu n_\mu - q_\mu q_\nu + q^2 n_\mu n_\nu}{|\mathbf{q}|^2}\,. \tag{8.5.7}
$$

ここで n^μ は時間的定ベクトル $n^\mu \equiv (0,0,0,1)$ であり，q^2 は通常のように $\mathbf{q}^2 - (q^0)^2$ だが，q^0 はまったく任意の値をとる量だ．(8.5.7) の q^0 は 4 元運動量保存則から決める．つまり，この量は光子の線がつくられる頂点に出入りする物質の p^0 の流出量と流入量の差で与えられる．このため q_μ や q_ν に比例する項は S 行列に寄与しない．これは q_μ や q_ν の因子が ∂_μ や ∂_ν の微分のように働き，光子場 a_μ や a_ν が結合する j^μ や j^ν のカレントは保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ を満たすからだ.* $n_\mu n_\nu$ に

---

*この議論はかなり大雑把なものだ．この結果はファインマン・ダイアグラムの詳細な解析で確認されている.[3] しかし，9.6 節でわかるようにこの問題は経路積分で扱うのが最も簡便だ．

比例する項は q^2 の因子を含み, プロパゲーターの分母にある q^2 を打ち消す. この結果, この項は作用にあたかも,

$$-i\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4y\,[-ij^0(x)][-ij^0(y)]\frac{-i}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4q}{|\mathbf{q}|^2}\,e^{iq\cdot(x-y)}$$

という項があるかのような寄与を与える. q^0 の積分は時間に関するデルタ関数を与えるから, これは相互作用ハミルトニアン $V(t)$ に,

$$-\frac{1}{2}\int d^3x\int d^3y\,\frac{j^0(\mathbf{x},t)\,j^0(\mathbf{y},t)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

という項があるのと同等だ. これは, 丁度 (8.4.25) のクーロン相互作用を打ち消す. この結果によれば, 今後, 実際上光子のプロパゲーターは共変な形,

$$\Delta^{\text{eff}}_{\mu\nu}(x-y)=(2\pi)^{-4}\int d^4q\frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2-i\epsilon}e^{iq\cdot(x-y)} \tag{8.5.8}$$

にとり, クーロン相互作用を落とすと考えればよい. ここで明確になったのは, 瞬間的遠隔相互作用であるクーロン相互作用が見掛け上ローレンツ不変性を破るにもかかわらず, 5.9 節で見たように $a^\mu(x)$ が 4 元ベクトルではなくローレンツ共変性が $a^\mu(x)$ のプロパゲーターでも破れていれて, この二つの破れが打ち消しあってローレンツ不変性が成り立っていることだ. 実用的な見地からいうと, 重要なのは運動量空間でのファインマン則であり, 光子の内線の寄与は単に,

$$\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2-i\epsilon} \tag{8.5.9}$$

であり, クーロン相互作用は忘れればよいということだ.

8.6 スピノル電磁理論のファインマン則

ここまでで量子電磁理論で S 行列を計算するためのファインマン則についてまとめる準備が整った. 話をはっきりさせるために, スピン

$\frac{1}{2}$, 電荷 $q = -e$, 質量 m の荷電粒子 1 種類の電磁理論をとりあげる. このフェルミオンを電子と呼ぶことにするが, この形式はミューオンや他の同様な粒子にも適用できる. この理論では, 最も単純なゲージ不変かつローレンツ不変なラグランジアンは, 以下で与えられる.*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \bar{\Psi}\left(\gamma^{\mu}[\partial_{\mu} + i\,e\,A_{\mu}] + m\right)\Psi \,. \tag{8.6.1}$$

これより, 4 元電流ベクトルは単に,

$$J^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu}} = -i\,e\,\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi \tag{8.6.2}$$

だ. 相互作用表示での (8.4.23) の相互作用は,

$$V(t) = +i\,e \int d^3x\ \left(\bar{\psi}(\mathbf{x},t)\gamma^{\mu}\psi(\mathbf{x},t)\right)\ a_{\mu}(\mathbf{x},t) + V_{\text{Coul}}(t) \tag{8.6.3}$$

となる. (ここには V_{matter} 項は無い.) これまでに見たように, クーロン項 $V_{\text{Coul}}(t)$ は光子のプロパゲーターの非共変的で時間について局所的な項を打ち消す働きをしている.

6.3 節の一般的な結果を使うと, S 行列 の連結部分の運動量空間でのファインマン則は以下のようになる.

(i) 与えられた数以下の頂点を持つファインマン・ダイアグラムを全て書き下す. ダイアグラムは矢印のついた電子の線と, 矢印の無い光子の線からなり, これらの線は頂点でつながっている. 頂点では, 1 本の出ていく電子の線と一本の入ってくる電子の線, それに光子の線一本がある. 始状態の粒子それぞれについて下からダイアグラムに入ってくる外線があり, 終状態の粒子にはダイアグラムから上へ出ていく外線がある. 電子は矢印が上向きでダイアグラムに出入りする外線で表され, 陽電子は矢印が下向きでダイアグラムに出入りする外線で表される. 内線は各頂点に必要な本数の線が付けるだけの数になってい

*12 章で, もっと複雑な項はなぜラグランジアン密度から除外されているかについて論じる.

る．それぞれの内線には，それに沿って特定の方向へ流れている質量殻外の 4 元運動量が伴なう．(これは電子の線については，通常矢印の向きと同じ向きにとる.) 各外線は，対応する始状態および終状態の電子または光子の運動量とスピンの z 成分，またはヘリシティを伴なう．

(ii) ダイアグラムの各成分に伴なう因子は次の通りだ．

頂点

それぞれの頂点に流れ込む電子の線の 4 成分ディラック添字を α，流れ出す方を β，それから光子の時空の添字を μ とする．このとき，それぞれの頂点がもつ因子は，

$$(2\pi)^4\, e\,(\gamma^\mu)_{\beta\alpha}\delta^4(k-k'+q) \tag{8.6.4}$$

だ．ここで，k と k' は，それぞれ，電子の流入運動量と流出運動量であり，q は頂点に流れ込む光子の運動量 (または頂点から出ていく光子の運動量の符号を変えたもの) だ．

外線

外線は対応する始状態か終状態にある粒子の 3 元運動量 $\mathbf{p}$ とスピンの z 成分，またはヘリシティ σ を伴なっている．ある頂点から終状態へ出ていく電子のディラック添字をβ とすると，因子,*

$$\frac{\bar{u}_\beta(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}} \tag{8.6.5}$$

がかかる．終状態にある陽電子が，ある頂点にディラック添字 α でつながっているときには，

$$\frac{v_\alpha(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}} \tag{8.6.6}$$

*(8.6.4) の相互作用からは行列 β が除かれているために，$u^\dagger$ と $v^\dagger$ の代わりに $\bar{u}$ と $\bar{v}$ が現れる．

の因子となる. 始状態の電子が頂点にディラック添字 α で入るときには, 因子,

$$\frac{u_\alpha(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}} \tag{8.6.7}$$

が対応する. 始状態にある陽電子が頂点とディラック添字 β でつながるときには,

$$\frac{\bar{v}_\beta(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}} \tag{8.6.8}$$

となる. 上で, u と v は 5.5 節で述べた 4 成分スピノルだ. 終状態の光子が時空の添字 μ で頂点とつながるときには, 因子,

$$\frac{e^*_\mu(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p^0}} \tag{8.6.9}$$

がでる. 始状態の光子が時空の添字 μ を持って頂点につながるときには,

$$\frac{e_\mu(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p^0}} \tag{8.6.10}$$

という因子となる. ここで, e_μ は前節で述べた光子の偏極 4 元ベクトルだ.

内線

電子の内線が 4 元運動量 k を持ち, ディラック添字がβ の頂点から α の頂点へつないでいるとき,

$$\frac{-i}{(2\pi)^4}\ \frac{[-i\not{k}+m]_{\alpha\beta}}{k^2+m^2-i\epsilon} \tag{8.6.11}$$

の因子がある. (ここで, 非常に便利な「ディラック・スラッシュ」(Dirac slash) の記法を使う. この記法では, 任意の 4 元ベクトル v^μ について, $\not{v}$ は $\gamma_\mu v^\mu$ を意味する.) 4 元運動量 q で時空の添字 μ の頂点と ν の頂点をつなぐ光子の内線は,

$$\frac{-i}{(2\pi)^4}\ \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2-i\epsilon} \tag{8.6.12}$$

の因子を持つ.

(iii) 以上の因子の積を内線が運ぶ 4 元運動量全てについて積分し, 全てのディラックと時空の添字について和をとる.

(iv) このようにして得られたファインマン・ダイアグラムの寄与を全て足す.

このときには, 6.1 節の (v) と (vi) で述べた, 場合の数による因子とフェルミオンの符号を必要に応じて入れる.

ファインマン・ダイアグラムでは内線と頂点の数が増大すると, たちまち計算が困難になる. したがって, どのような数因子が複雑なダイアグラムの寄与を小さくするかをだいたい理解しておくことが重要だ. ここでは, これらの数因子について, 頂点が持つ電荷 e のみならず, 頂点, プロパゲーター, 運動量積分からでる 2 と π も見積もっておく.

連結ファインマン・ダイアグラムで, 頂点を V 個, 内線を I 本, 外線を E 本, ループを L 個持つものを考える. これらの量は独立ではなく, 6.3 節ですでに使った結果,

$$L = I - V + 1\,, \qquad 2I + E = 3V$$

で関係している. 各頂点には $e(2\pi)^4$ の因子がともない, 各内線と各ループの 4 元運動量積分には $(2\pi)^{-4}$ がともなう. 4 次元ユークリッド空間の体積要素は, 半径パラメータを κ とすると$\pi^2\kappa^2 d\kappa^2$ だから, 各ループは π^2 の寄与をする. したがって, ダイアグラムは,

$$(2\pi)^{4V} e^V (2\pi)^{-4I} \pi^{2L} = (2\pi)^4 e^{E-2} \left(\frac{e^2}{16\pi^2}\right)^L$$

という因子を持つ. 外線の本数 E は過程によって決められているので, ファインマン・ダイアグラムの大きさはループが一つ増えるたび

にかけられる因子,

$$\frac{e^2}{16\pi^2} = \frac{\alpha}{4\pi} = 5.81 \times 10^{-4}$$

で押さえられる. 幸いにして, これは非常に小さい量であり, このために, 通常はせいぜい数個のループを持ったファインマン・ダイアグラムだけを使って比較的正確な結果が得られる.

* * *

実際の実験では始状態と終状態の光子と電子のヘリシティやスピンの z 成分が全部知られているわけではないので, この点について多少論じておこう. 特に光子についてはヘリシティよりも横偏極, 楕円偏極状態として特定されているときが多いので, この考察は重要だ. 前節で見たように, ヘリシティ ± 1 の光子では, 偏極ベクトルは,

$$e(\mathbf{p}, \pm 1) = R(\hat{\mathbf{p}}) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm i/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

だ. ここで, $R(\hat{\mathbf{p}})$ は z 軸を $\mathbf{p}$ の方向へ変換する標準的な回転行列だ. 光子の状態としてはこれらのみが可能なわけではなく, 一般に, 光子状態は,

$$\alpha_+ \Psi_{\mathbf{p},+1} + \alpha_- \Psi_{\mathbf{p},-1} \tag{8.6.13}$$

というように, $\Psi_{\mathbf{p},\pm 1}$ のヘリシティ状態の重ね合わせになっている. この規格化は,

$$|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1 \tag{8.6.14}$$

と行なわれる. このような光子を吸収, または放出する S 行列の成分を計算するには, ファインマン則の $e_\mu(\mathbf{p}, \pm 1)$ を,

$$e_\mu(\mathbf{p}) = \alpha_+\, e_\mu(\mathbf{p}, +1) + \alpha_-\, e_\mu(\mathbf{p}, -1) \tag{8.6.15}$$

で置き換えればよい. 特定のヘリシティの偏極ベクトルは, 規格化条件,

$$e_\mu^*(\mathbf{p},\lambda')\, e^\mu(\mathbf{p},\lambda) = \delta_{\lambda'\lambda} \tag{8.6.16}$$

を満たし, したがって一般に,

$$e_\mu^*(\mathbf{p})\, e^\mu(\mathbf{p}) = 1 \tag{8.6.17}$$

だ. 2 つの極端な場合は, $\alpha_- = 0$ か $\alpha_+ = 0$ を持つ**円偏極** (circular polarization) と, $|\alpha_+| = |\alpha_-| = 1/\sqrt{2}$ を持つ**線偏極** (linear polarization) だ. 線偏極では (8.6.13) の状態の位相を調節して, α_+ と α_- を互いの複素共役にできる. こうすると, それらは,

$$\alpha_\pm = \exp(\mp i\phi)\Big/\sqrt{2} \tag{8.6.18}$$

と表される. したがって, ファインマン則では偏極ベクトルとしては,

$$e_\mu(\mathbf{p}) = R(\hat{\mathbf{p}})\begin{bmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \tag{8.6.19}$$

を使えばよい. つまり, ϕ は光子の $\mathbf{p}$ に垂直な面での偏極角だ. ここで, 光子の偏極ベクトルは実だが, これは線偏極のときにのみ可能だ. 円偏極と線偏極という 2 つの極端な場合の間には**楕円偏極** (elliptic polarization) があり, このときは $|\alpha_+|$ と $|\alpha_-|$ はゼロでなく, 等しくもない.

より一般的には, 始状態の光子はスピン状態の統計的混合になっている. もっとも一般的な場合では, 初期の光子はいくつもの可能な偏極ベクトル $e_\mu^{(r)}(\mathbf{p})$ が確率 P_r で混ざった状態だ. このような光子がある過程で吸収される率は,

$$\Gamma = \sum_r P_r |e_\mu^{(r)}(\mathbf{p})\, M^\mu|^2 = M^{\mu *} M^\nu \rho_{\nu\mu} \tag{8.6.20}$$

で与えられる. ここで, ρ は密度行列,

$$\rho_{\nu\mu} \equiv \sum_r P_r\, e_\nu^{(r)}(\mathbf{p})\, e_\mu^{(r)*}(\mathbf{p}) \tag{8.6.21}$$

だ. ρ は明らかにエルミートな正の行列でトレースが 1 であり (これは $\sum_r P_r = 1$ による), また, $\rho_{\nu 0} = \rho_{0\mu} = 0$ で $\rho_{\nu\mu} p^\nu = \rho_{\nu\mu} p^\mu = 0$ だ. このため, これを,

$$\rho_{\nu\mu} = \sum_{s=1,2} \lambda_s\, e_\nu(\mathbf{p}; s)\, e_\mu^*(\mathbf{p}; s) \tag{8.6.22}$$

と書くことができる. ここで $e_\mu(\mathbf{p}; s)$ は ρ の 2 つの正規直交固有ベクトルで,

$$e_0(\mathbf{p}; s) = e_\mu(\mathbf{p}; s) p^\mu = 0 \tag{8.6.23}$$

が成立している. また, λ_s はそれぞれの固有値であり,

$$\lambda_s \geq 0\,, \qquad \sum_{s=1,2} \lambda_s = 1$$

を満たす. このため, 光子の吸収過程の率は,

$$\Gamma = \sum_{s=1,2} \lambda_s |e_\nu(\mathbf{p}; s) M^\nu|^2 \tag{8.6.24}$$

と書ける. したがって, 初期の光子状態がどんな統計的混合状態になっていても, これは, ただ 2 つの直交する偏極状態 $e_\nu(\mathbf{p}; s)$ が確率 λ_s で混合しているのと等価だ.

特に, もし初期の光子の偏極状態について何も知らなければ, 偏極ベクトル $e_\nu(\mathbf{p}; s)$ の確率 λ_s は等しく, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ であり, 密度行列は (したがって, 吸収率も) 初期偏極についての平均となる.

$$\rho_{ij} = \tfrac{1}{2} \sum_{s=1,2} e_i(\mathbf{p}; s)\, e_j^*(\mathbf{p}; s) = \tfrac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j\right)\ . \tag{8.6.25}$$

幸運にも, この結果は平均をとるための偏極ベクトル $e_i(\mathbf{p};s)$ の選び方に依らない. つまり, 偏極していない光子については, 吸収率をどんな偏極ベクトルの正規直交な組について平均してもよい. 同様に, 終状態の光子について偏極を測定しなければ, 反応率はどんな偏極ベクトルの正規直交な組について足し上げても得られる.

電子と陽電子にも同じ話があてはまる. もし, (通常そうだが) 電子や陽電子をどれかのスピン状態が他より起こりやすいように準備しなければ, 反応率は初期のスピン状態のどんな正規直交の組について平均しても得られる. この組の例としてはスピンの z 成分 $\sigma = \pm\frac{1}{2}$ がある. また, 終状態の電子や陽電子のスピンを測らなければ, スピンの z 成分 $\sigma = \pm\frac{1}{2}$ のようなどれかの正規直交する組について和を取ればよい. その和は (5.5.37) と (5.5.38) の関係を使えば実行できる.

$$\sum_\sigma u_\alpha(\mathbf{p},\sigma)\bar{u}_\beta(\mathbf{p},\sigma) = \left(\frac{-i\not{p}+m}{2p^0}\right)_{\alpha\beta}, \tag{8.6.26}$$

$$\sum_\sigma v_\alpha(\mathbf{p},\sigma)\bar{v}_\beta(\mathbf{p},\sigma) = \left(\frac{-i\not{p}-m}{2p^0}\right)_{\alpha\beta}. \tag{8.6.27}$$

ここで, $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ だ. 例えばもし始状態が, 運動量 $\mathbf{p}$ でスピンの z 成分が σ の電子と, 運動量 $\mathbf{p}'$ でスピンの z 成分が σ' の陽電子とを含めば, この過程の S 行列 要素は $(\bar{v}_\alpha(\mathbf{p}',\sigma')\,\mathcal{M}_{\alpha\beta}\,u_\beta(\mathbf{p},\sigma))$ の形をしている. したがって, もし電子のスピンも陽電子のスピンも観測しなければ, 反応率は,

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{4}\sum_{\sigma',\sigma}\left|(\bar{v}_\alpha(\mathbf{p}',\sigma')\,\mathcal{M}_{\alpha\beta}\,u_\beta(\mathbf{p},\sigma))\right|^2\\ &\quad= \tfrac{1}{4}\mathrm{Tr}\left\{\beta\,\mathcal{M}^\dagger\,\beta\left(\frac{-i\not{p}'-m}{2p^{0\prime}}\right)\mathcal{M}\left(\frac{-i\not{p}+m}{2p^0}\right)\right\}\end{aligned}$$

に比例する. このようなトレースの計算のテクニックはこの章の補遺にまとめておく.

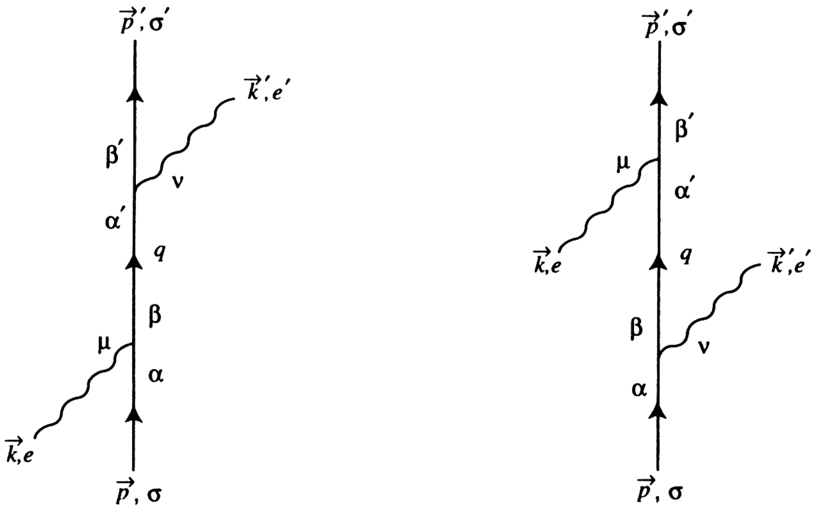


図 8.1: コンプトン散乱の二つの最低次のファインマン・ダイアグラム. 直線は電子, 波線は光子を意味する.

8.7 コンプトン散乱

これまでに述べた方法の適用例としてここで, 電子 (または, 他のスピン $\frac{1}{2}$ で電荷 $-e$ の粒子) による光子の散乱を e の最低次で扱う. 始状態と終状態それぞれの光子の運動量と偏極ベクトルを k^μ, e^μ と k'^μ, e'^μ で表す. ここで, $k^0 = |\mathbf{k}|$ と $k^{0\prime} = |\mathbf{k}'|$ が成立する. また, 電子の始状態と終状態それぞれでの運動量とスピンの z 成分を p^μ, σ と p'^μ, σ' とする. ここで, m を電子の質量として, $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^{\,2} + m^2}$ と $p'^0 = \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m^2}$ が成立する. この過程の最低次のファインマン・ダイアグラムは 8.1 図に示してある. 前節にまとめたファインマン則を使うと, このダイアグラムに対応する S 行列 の成分は,

$$S(\mathbf{p}, \sigma \;+\; \mathbf{k}, e \;\to\; \mathbf{p}', \sigma' \;+\; \mathbf{k}', e') =$$

$$\frac{\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')_{\beta'}}{(2\pi)^{3/2}}\;\frac{e_\nu^{*\prime}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k^{0\prime}}}\;\frac{u(\mathbf{p},\sigma)_\alpha}{(2\pi)^{3/2}}\;\frac{e_\mu}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k^0}}$$
$$\times\int d^4q\,\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\right]\left[\frac{-i\not{q}+m}{q^2+m^2-i\epsilon}\right]_{\alpha'\beta}$$
$$\times\Big\{\left[e(2\pi)^4\gamma^\nu_{\beta'\alpha'}\delta^4(q-p'-k')\right]\left[e(2\pi)^4\gamma^\mu_{\beta\alpha}\delta^4(q-p-k)\right]$$
$$+\left[e(2\pi)^4\gamma^\mu_{\beta'\alpha'}\delta^4(q+k-p')\right]\left[e(2\pi)^4\gamma^\nu_{\beta\alpha}\delta^4(q+k'-p)\right]\Big\} \tag{8.7.1}$$

となる. q 積分は (自明だが) 行っておいて, i と 2π の因子を集め, 結果を行列の記法で表わすと, もっと簡単に,

$$S=\frac{-ie^2\delta^4(p'+k'-p-k)}{(2\pi)^2\sqrt{2k^{0\prime}\cdot 2k^0}}\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\left[\not{e}^{*\prime}\left(\frac{-i(\not{p}+\not{k})+m}{(p+k)^2+m^2}\right)\not{e}\right.$$
$$\left.+\not{e}\left(\frac{-i(\not{p}-\not{k}')+m}{(p-k')^2+m^2}\right)\not{e}^{*\prime}\right]u(\mathbf{p},\sigma) \tag{8.7.2}$$

と書ける. (ここで, $\not{e}^*$ は $e_\mu^*\gamma^\mu$ のことであり, $(\not{e})^*$ ではない. また, この式の分母はゼロにならないので $-i\epsilon$ は落とした.) $p^2=-m^2$ と $k^2=k'^2=0$ から, 分母は簡単化できて,

$$(p+k)^2+m^2=2p\cdot k\ , \tag{8.7.3}$$

$$(p-k')^2+m^2=-2p\cdot k' \tag{8.7.4}$$

となる. また,「ファインマン振幅」 M は一般的に (3.3.2) で定義され, (散乱が起るとしているので) ここでは以下のようになる.

$$S=-2\pi i\delta^4(p'+k'-p-k)M\ . \tag{8.7.5}$$

したがって,

$$M=\frac{e^2}{4(2\pi)^3\sqrt{k^0k^{0\prime}}}\bar{u}(\mathbf{p}'\sigma')\Big\{\not{e}^{*\prime}\Big[-i(\not{p}+\not{k})+m\Big]\not{e}\Big/p\cdot k$$
$$-\not{e}\Big[-i(\not{p}-\not{k}')+m\Big]\not{e}^{*\prime}\Big/p\cdot k'\Big\}u(\mathbf{p},\sigma) \tag{8.7.6}$$

だ. 微分断面積は, M を使って (3.4.15) で与えられ, ここでは,

$$d\sigma = (2\pi)^4 u^{-1} |M|^2 \delta^4(p' + k' - p - k) d^3p' d^3k' \tag{8.7.7}$$

となる. 粒子の 1 個が質量ゼロのため, 初期速度の (3.4.17) は

$$u = |p \cdot k| \Big/ p^0 k^0 \tag{8.7.8}$$

となる.

これより先は, 特定の座標系を選ぶのが便利だ. 原子の中の電子は非相対論的に運動するため, 高エネルギーの光子 (X 線やガンマ線) と電子の散乱実験では通常 (必ずというわけではないが) 始状態の電子は静止しているとしてよい. ここでもその座標系をとることにして,

$$\mathbf{p} = 0\,, \qquad p^0 = m \tag{8.7.9}$$

とする. (8.7.8) の速度は単に,

$$u = 1 \tag{8.7.10}$$

で与えられる. 簡単になるように光子のエネルギーを以下のように書く.

$$\omega = k^0 = |\mathbf{k}| = -p \cdot k \Big/ m\,, \tag{8.7.11}$$

$$\omega' = k^{0'} = |\mathbf{k}'| = -p \cdot k' \Big/ m\,. \tag{8.7.12}$$

(8.7.7) の 3 元運動量のデルタ関数より体積要素 d^3p' が消え, $\mathbf{p}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ となる. これにより, 残るエネルギーのデルタ関数は,

$$\delta(p'^0 + k'^0 - p^0 - k^0) = \delta\left(\sqrt{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 + m^2} + \omega' - m - \omega\right) \tag{8.7.13}$$

となる. このために, ω' が,

$$\sqrt{\omega^2 - 2\omega\omega' \cos\theta + \omega'^2 + m^2} = \omega + m - \omega'$$

を満たすように決まる. ここで, θ は $\mathbf{k}$ と $\mathbf{k}'$ の間の角度だ. 両辺を 2 乗して ω'^2 の項を打消すと,

$$\omega' = \omega \, \frac{m}{m + \omega(1 - \cos\theta)} \equiv \omega_c(\theta) \tag{8.7.14}$$

が得られる.* (8.7.13) のエネルギーのデルタ関数は以下のようになる.

$$\begin{aligned}\delta(p'^0 + k'^0 - p^0 - k^0) &= \frac{\delta(\omega' - \omega_c(\theta))}{|\partial[\sqrt{\omega^2 - 2\omega\omega'\cos\theta + \omega'^2 + m^2} + \omega']/\partial\omega'|} \\ &= \frac{\delta(\omega' - \omega_c(\theta))}{|(\omega' - \omega\cos\theta)/p'^0 + 1|} \\ &= \frac{p'^0\omega'}{m\omega}\delta(\omega' - \omega_c(\theta)) \,. \end{aligned} \tag{8.7.15}$$

また, 体積要素 d^3k' は,

$$d^3k' = \omega'^2 d\omega' d\Omega \tag{8.7.16}$$

と書ける. ここで, $d\Omega$ は最終状態の光子が散乱される立体角を意味する. (8.7.15) に最終的に残っているデルタ関数は (8.7.16) の微分 $d\omega'$ を消して, 最後に微分断面積が次のように得られる.

$$d\sigma = (2\pi)^4 |M|^2 \, \frac{p'^0\omega'^3}{m\omega} \, d\Omega \,. \tag{8.7.17}$$

ここで, $p'^0 = m + \omega - \omega'$ であり, ω' は (8.7.14) で与えられる. .

通常は, 始状態と終状態の電子のスピンの z 成分は測定しない. そのような場合には, σ' について和をとり σ について平均しなくてはならない. つまり, σ と σ' について和をとり 2 で割ればよい.

$$d\bar{\sigma}(\mathbf{p} + \mathbf{k}, e \;\to\; \mathbf{p}' + \mathbf{k}', e') \equiv \tfrac{1}{2}\sum_{\sigma',\sigma} d\sigma(\mathbf{p}, \sigma + \mathbf{k}, e \to \mathbf{p}', \sigma' + \mathbf{k}', e') \,. \tag{8.7.18}$$

---

*これは, 波長が

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1 - \cos\theta}{m}$$

と増大することと同値だ. コンプトン (A.H. Compton) は 1922–3 年に電子による X 線の散乱でこの関係式を確認し, アインシュタインが 1905 年に提唱した光の量子説の検証で重大な役割を果たした. そして, 光の量子はコンプトンの実験の後すぐに, 光子 (フォトン) と呼ばれるようになった.

これを計算するには標準的な公式,

$$\sum_{\sigma} u_\alpha(\mathbf{p},\sigma)\bar{u}_\beta(\mathbf{p},\sigma) = \frac{(-i\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{2p^0} \tag{8.7.19}$$

および, σ' についての同様な式を使う. これより, 任意の 4×4 行列 A について以下の式が成立することがわかる.

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma,\sigma'} |\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')Au(\mathbf{p},\sigma)|^2 \\
&\quad = \sum_{\sigma,\sigma'} (\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')Au(\mathbf{p},\sigma))(\bar{u}(\mathbf{p},\sigma)\beta A^\dagger \beta u(\mathbf{p}',\sigma')) \\
&\quad = \sum_{\sigma,\sigma'} A_{\beta\alpha} u_\alpha(\mathbf{p},\sigma)\bar{u}_\gamma(\mathbf{p},\sigma)(\beta A^\dagger \beta)_{\gamma\delta} u_\delta(\mathbf{p}',\sigma')\bar{u}_\beta(\mathbf{p}',\sigma') \\
&\quad = \mathrm{Tr}\left\{ A\left(\frac{-i\not{p}+m}{2p^0}\right)\beta A^\dagger \beta \left(\frac{-i\not{p}'+m}{2p'^0}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{8.7.20}$$

$\beta\gamma_\mu^\dagger\beta = -\gamma_\mu$ を思い出すと, (8.7.6) は,

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma,\sigma'} |M|^2 &= \frac{e^4}{64(2\pi)^6 \omega\omega' p^0 p'^0} \\
&\times \mathrm{Tr}\left[\left\{ \not{e}'^* \frac{[-i(\not{p}+\not{k})+m]}{p\cdot k}\not{e} - \not{e}\frac{[-i(\not{p}-\not{k}')+m]}{p\cdot k'}\not{e}'^* \right\}\right. \\
&\times(-i\not{p}+m)\left\{ \not{e}^* \frac{[-i(\not{p}+\not{k})+m]}{p\cdot k}\not{e}' \right. \\
&\qquad \left.\left. -\not{e}'\frac{[-i(\not{p}-\not{k}')+m]}{p\cdot k'}\not{e}^* \right\}(-i\not{p}'+m)\right]
\end{aligned} \tag{8.7.21}$$

となる. ($\not{e}^*$ は $e_\mu^*\gamma^\mu$ の意味であって, $(e_\mu\gamma^\mu)^*$ ではなく, また $\not{e}'^*$ についても同様であることをもう一度思い出しておこう.) ここでは,

$$e\cdot p = e^*\cdot p = e'\cdot p = e'^*\cdot p = 0 \tag{8.7.22}$$

が成立する「ゲージ」を使う. このようなゲージとしては例えば, 実験室系でのクーロン・ゲージがあり, このときは $e^0 = e'^0 = 0$ と $\mathbf{p} = 0$

が成立している. これより,

$$[-i\not{p}+m]\not{e}\,[-i\not{p}+m]=\not{e}\,[i\not{p}+m]\,[-i\not{p}+m]$$
$$=\not{e}\,(\not{p}^2+m^2)=\not{e}\,(p_\mu p^\mu+m^2)=0$$

がわかる. $\not{e}'^*$, $\not{e}'$ と $\not{e}^*$ についても同様だ. したがって, (8.7.21) は以下の非常に簡単な形で書ける.

$$\sum_{\sigma,\sigma'}|M|^2=\frac{-e^4}{64(2\pi)^6\omega\omega' p^0 p'^0}\mathrm{Tr}\left[\left\{\frac{\not{e}'^*\not{k}\,\not{e}}{p\cdot k}+\frac{\not{e}\not{k}'\not{e}'^*}{p\cdot k'}\right\}(-i\not{p}+m)\right.$$
$$\left.\times\;\left\{\frac{\not{e}^*\not{k}\,\not{e}'}{p\cdot k}+\frac{\not{e}'\not{k}'\not{e}^*}{p\cdot k'}\right\}(-i\not{p}'+m)\right]\,. \tag{8.7.23}$$

奇数個のガンマ行列の積のトレースはゼロなので, この式のうち m について 0 次と 2 次の項のみが残る.

$$\sum_{\sigma,\sigma'}|M|^2=\frac{e^4}{64(2\pi)^6\omega\omega' p^0 p'^0}$$
$$\times\left(\frac{T_1}{(p\cdot k)^2}+\frac{T_2}{(p\cdot k)(p\cdot k')}+\frac{T_3}{(p\cdot k)(p\cdot k')}+\frac{T_4}{(p\cdot k')^2}\right.$$
$$\left.-\frac{m^2t_1}{(p\cdot k)^2}-\frac{m^2t_2}{(p\cdot k)(p\cdot k')}-\frac{m^2t_3}{(p\cdot k)(p\cdot k')}-\frac{m^2t_4}{(p\cdot k')^2}\right)\,. \tag{8.7.24}$$

ここで, 以下の定義を使った.

$$T_1=\mathrm{Tr}\left\{\not{e}'^*\not{k}\,\not{e}\,\not{p}\,\not{e}^*\not{k}\,\not{e}'\not{p}'\right\}\,, \tag{8.7.25}$$
$$T_2=\mathrm{Tr}\left\{\not{e}'^*\not{k}\,\not{e}\,\not{p}\,\not{e}'\not{k}'\not{e}^*\not{p}'\right\}\,, \tag{8.7.26}$$
$$T_3=\mathrm{Tr}\left\{\not{e}\not{k}'\not{e}'^*\not{p}\,\not{e}^*\not{k}\,\not{e}'\not{p}'\right\}\,, \tag{8.7.27}$$
$$T_4=\mathrm{Tr}\left\{\not{e}\not{k}'\not{e}'^*\not{p}\,\not{e}'\not{k}'\not{e}^*\not{p}'\right\}\,, \tag{8.7.28}$$
$$t_1=\mathrm{Tr}\left\{\not{e}'^*\not{k}\,\not{e}\,\not{e}^*\not{k}\,\not{e}'\right\}\,, \tag{8.7.29}$$
$$t_2=\mathrm{Tr}\left\{\not{e}'^*\not{k}\,\not{e}\,\not{e}'\not{k}'\not{e}^*\right\}\,, \tag{8.7.30}$$

$$t_3 = \mathrm{Tr}\left\{\not{e}\,\not{k}'\not{e}'^*\not{e}^*\not{k}\,\not{e}'\right\}\ , \tag{8.7.31}$$

$$t_4 = \mathrm{Tr}\left\{\not{e}\,\not{k}'\not{e}'^*\not{e}'\not{k}'\not{e}^*\right\}\ . \tag{8.7.32}$$

この章の補遺で $\mathrm{Tr}\{\not{a}\,\not{b}\,\not{c}\,\not{d}\ldots\}$ の形のどんなトレースも 4 元ベクトル $a, b, c, d, \ldots$ のスカラー積の積の和で書けることを示す. 一般的に, t_k のような 6 個のガンマ行列の積のトレースには 15 個の項がある. また, T_k のような 8 個の場合は 105 項ある. しかし, 幸いにも, ここではほとんどのスカラー積が消える. これは (8.7.22) に加えて, $k \cdot k = k' \cdot k' = 0$ のためだ. (さらに $e \cdot e^* = e' \cdot e'^* = 1$ もある.) 計算をさらに簡単にするために e^μ と e'^μ が実になる線偏光をとる. (8.7.25)–(8.7.32) の複素共役を落として,

$$T_1 \;=\; \mathrm{Tr}\left\{\not{e}'\not{k}\,\not{e}\,\not{p}\,\not{e}\,\not{k}\,\not{e}'\not{p}'\right\}$$

を得る. $e^\mu p_\mu = 0$ と $e^\mu e_\mu = 1$ より,

$$\not{e}\,\not{p}\,\not{e} = -\not{p}\,\not{e}\,\not{e} = -\not{p}$$

となるから,

$$T_1 = -\mathrm{Tr}\left\{\not{e}'\not{k}\,\not{p}\,\not{k}\,\not{e}'\not{p}'\right\}$$

だ. また, $k^\mu k_\mu = 0$ より,

$$\not{k}\,\not{p}\,\not{k} = -\not{k}\,\not{k}\,\not{p} + 2\not{k}\,p\cdot k = 2\not{k}\,p\cdot k$$

となる. したがって,

$$T_1 = -2(p\cdot k)\ \mathrm{Tr}\left\{\not{e}'\not{k}\,\not{e}'\not{p}'\right\}$$

だ. (8.A.6) を使うと, これは次のようになる.

$$T_1 = -8(p\cdot k)[2(e'\cdot k)(e'\cdot p') - k\cdot p']\ .$$

以下の置き換えをすると便利だ.

$$e' \cdot p' = e' \cdot [p + k - k'] = e' \cdot k \ ,$$
$$k \cdot p' = -\tfrac{1}{2}(p' - k)^2 - \tfrac{1}{2}m^2 = -\tfrac{1}{2}(p - k')^2 - \tfrac{1}{2}m^2 = p \cdot k' \ .$$

こうすると,

$$T_1 = -16(p \cdot k)(e' \cdot k)^2 + 8(p \cdot k)(p \cdot k') \tag{8.7.33}$$

となる. 同様の (もっと長い) 計算をすると,

$$\begin{aligned} T_2 &= T_3 \\ &= +8(e \cdot k')^2(p \cdot k) + 16\ (e \cdot e')^2(p \cdot k')(p \cdot k) + 8(e \cdot e')^2(k \cdot k')m^2 \\ &\quad -8(e \cdot e')m^2(k \cdot e')(k' \cdot e) + 8(e' \cdot k)^2(p \cdot k') \\ &\quad -4(k \cdot p)^2 + 4(k \cdot k')(p \cdot p') - 4(k \cdot p')(p \cdot k') \ , \end{aligned} \tag{8.7.34}$$

$$T_4 = -16(p \cdot k')(e \cdot k')^2 + 8(p \cdot k)(p \cdot k') \ , \tag{8.7.35}$$

$$t_1 = t_4 = 0 \ , \tag{8.7.36}$$

$$\begin{aligned} t_2 &= t_3 \\ &= -8(e \cdot e')(k \cdot e')(k' \cdot e) + 8(k \cdot k')(e \cdot e')^2 - 4(k \cdot k') \end{aligned} \tag{8.7.37}$$

を得る. (8.7.24) の項を全て集めると,

$$\sum_{\sigma,\sigma'} |M|^2 = \frac{e^4}{64(2\pi)^6 \omega\omega' p^0 p'^0} \left[\frac{8(k \cdot k')^2}{(k \cdot p)(k' \cdot p)} + 32(e \cdot e')^2 \right] \tag{8.7.38}$$

を得る.

これはどのローレンツ系でも正しい. **実験室系**では, 以下の特別な関係がある.

$$k \cdot k' = \omega\omega'(cos\theta - 1) = m\omega\omega' \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right) \ ,$$
$$p \cdot k = -m\omega \ , \qquad p \cdot k' = -m\omega' \ .$$

(8.7.38) を (8.7.17) と組み合わせてこれらの関係式を使うと, 実験室系での断面積が次のように与えられる.

$$\frac{1}{2}\sum_{\sigma,\sigma'} d\sigma(\mathbf{p},\sigma\ +\ \mathbf{k},e\ \to\ \mathbf{p}',\sigma'\ +\ \mathbf{k}',e') = \frac{e^4\omega'^2 d\Omega}{64\pi^2 m^2\omega^2}$$

$$\times\left[\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}\ -2\ +4(e\cdot e')^2\right]. \tag{8.7.39}$$

これがクライン (O. Klein) と仁科が 1929 年に (古い摂動論を用いて) 導いた名高い式だ.

8.6 節で論じたように, 入射光子が (通常そうだが) 特定の偏極を持っていなければ, $\mathbf{e}$ の二つの直交する値について平均をとらなければならない. この平均は,

$$\frac{1}{2}\sum_{e} e_i e_j = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j)$$

を与え, このために微分断面積は,

$$\frac{1}{4}\sum_{e,\sigma,\sigma'} d\sigma(\mathbf{p},\sigma\ +\ \mathbf{k},e\ \to\ \mathbf{p}',\sigma'\ +\ \mathbf{k}',e')$$

$$= \frac{e^4\omega'^2 d\Omega}{64\pi^2 m^2\omega^2}\left[\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-2(\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{e}')^2\right] \tag{8.7.40}$$

となる. これより, 散乱された光子の偏極はその光子の進む方向に垂直であるのみならず, 入射方向にも垂直になる傾向があることがわかる. つまり, 散乱面に垂直になるわけだ. これはよく知られた結果で, 2 重星の食からくる光の偏極などの様々な現象でみられる.**

終状態の光子の偏極を観測しない実験に対して断面積を計算するには, (8.7.40) を e' について足し上げなければならない. このときには,

$$\sum_{e'} e'_i e'_j = \delta_{ij} - \hat{k}'_i\hat{k}'_j$$

** 一つの星からの光が, 同一視線上にあるもう一つの冷えた星の大気圏の外縁部で自由電子に散乱されると, 偏光を起こす. この偏光は, 通常は星の円盤面全部からの光を合わせて観測するので検出できない. しかし, 冷たい星が熱い方の星の片側からの光を遮る食では, 偏極が観測されている.

を使う. これにより,

$$\frac{1}{4}\sum_{e,e',\sigma,\sigma'} d\sigma(\mathbf{p},\sigma + \mathbf{k},e \to \mathbf{p}',\sigma' + \mathbf{k}',e') = \frac{e^4\omega'^2 d\Omega}{32\pi^2 m^2\omega^2}\left[\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-1+\cos^2\theta\right] \qquad (8.7.41)$$

となる. ここで θ は $\hat{\mathbf{k}}$ と $\hat{\mathbf{k}}'$ の間の角だ. 非相対論的な場合には $\omega \ll m$ であり, (8.7.41) は,

$$\frac{1}{4}\sum_{e,e',\sigma,\sigma'} d\sigma = \frac{e^4\, d\Omega}{32\pi^2 m^2}(1+\cos^2\theta) \qquad (8.7.42)$$

となる. 立体角の積分は,

$$\int[1+\cos^2\theta]d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi}[1+\cos^2\theta]\ \sin\theta\ d\theta = \frac{16\pi}{3}$$

だから, $\omega \ll m$ のときの全断面積は,

$$\sigma_{\mathrm{T}} = \frac{e^4}{6\pi^2 m^2} \qquad (8.7.43)$$

となる. これはしばしば $\sigma_{\mathrm{T}} = 8\pi r_0^2/3$ と書かれる. ここで, $r_0 = e^2/4\pi m = 2.818 \times 10^{-13}$ cm は**古典電子半径**と呼ばれる. (8.7.43) は電子の発見者トムソン (J.J. Thomson) にちなんで**トムソン断面積**と呼ばれる. (8.7.42) と (8.7.43) は元は, 平面波の電磁場のなかにある非相対論的な点粒子による光の再放射を古典的な力学と電磁理論で計算して導かれたものだ.

8.8 一般化: p 形式ゲージ場*

反対称な電磁場のテンソル $F_{\mu\nu}$ は, 物理と数学で特に重要な一般的なテンソルの中の一つだ. 一般に, p **形式** (form) は p 階の反対称共変

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

テンソルだ. p 形式 $t_{\mu_1,\mu_2,\cdots\mu_p}$ からは**外微分** (exterior derivative) と呼ばれる $(p+1)$ 形式 dt が構成できる.** これは微分を行い, 全ての添字について反対称化することで得られる.

$$(dt)_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p+1}} \equiv \partial_{[\mu_1}t_{\mu_2\mu_3\cdots\mu_{p+1}]}$$
$$\equiv \partial_{\mu_1}t_{\mu_2\mu_3\cdots\mu_{p+1}} - \partial_{\mu_2}t_{\mu_1\mu_3\cdots\mu_{p+1}} + \cdots + (-1)^p\partial_{\mu_{p+1}}t_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p} . \tag{8.8.1}$$

ここで, 角括弧 [...] はその中にある全ての添字についての反対称化を意味する. 微分の可換性より, 外微分は繰返すとゼロになる.

$$d(dt) = 0 . \tag{8.8.2}$$

外微分が消える p 形式は**閉じている** (closed) と言われる. また, それ自身が何かの外微分になっている p 形式は**完全** (exact) だと言う. (8.8.2) から, 任意の完全な p 形式は閉じていることがわかる. ポアンカレによる重要な定理[6]があって, それによれば, 単連結な領域では, どんな閉じた p 形式 も完全だ.† 例えば, (8.1.16) の斉次マックスウェル方程式は, 電磁場の 2 形式が閉じていることを意味する. ポアンカレの定理によればこれは閉じているので, 外微分, つまり $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ として書ける. (8.8.2) からまた, 2 形式 $F_{\mu\nu}$ はもし, A_μ が外微分, つまり, ゲージ変換 $\delta A_\mu = \partial_\mu \Omega$ だけ変化しても不変だ.

p 形式とその外微分形式からみれば, 質量ゼロの粒子を p 形式の

**外微分と p 形式は一般相対性理論で特別な役割を果たす. この一つの理由は, テンソルの外微分は共変微分でない通常の微分を使って計算されているにもかかわらずテンソルとして変換することにある.[5]

†複連結な空間では閉じた p 形式 は必ずしも完全ではない. 局所的には閉じた p 形式 はある外微分としてかけるが, これは空間全部について滑らかには実行できない. 閉じた p 形式 の集合で, 完全な p 形式 だけ異なるものを同じ同値類としたものを, この空間の p ドラム・コホモロジー群 (de Rham cohomology group) と呼ぶ. 空間のドラム・コホモロジー群とその空間のトポロジーとは深い関係があり,[6] これは 4 巻で論じる.

ゲージ場 $A_{\mu_1\cdots\mu_p}$ を用いてゲージ変換,

$$\delta A = d\Omega \tag{8.8.3}$$

で不変なように表わすことが自然だ.[‡] これはより詳しく書き下すと,

$$\delta A_{\mu_1\cdots\mu_p} = \partial_{[\mu_1}\Omega_{\mu_2\cdots\mu_p]}$$

となっている. ここで, $\Omega_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}}$ は任意の $(p-1)$ 形式 だ. このような p 形式ゲージ場から, ゲージ不変な場の強度,

$$F = dA \tag{8.8.4}$$

より詳しくは,

$$F_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} = \partial_{[\mu_1}A_{\mu_2\cdots\mu_{p+1}]} \tag{8.8.5}$$

を作れる. (別の方法としては, $(p+1)$ 形式 F から出発して, $dF=0$ を仮定して, $F=dA$ を満たす p 形式を導いてもよい.) 電磁理論との類似から, A のラグランジアンとしては以下の形が考えられる.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2(p+1)}F_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}F^{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} + J^{\mu_1\cdots\mu_p}A_{\mu_1\cdots\mu_p}\,. \tag{8.8.6}$$

ここで, J は反対称テンソル・カレントだ. (これは c 数でも, A 以外の場の関数でもよい.) 作用をゲージ不変にするために, J は以下の保存則を満たさなければならない.

$$\partial_{\mu_1}J^{\mu_1\cdots\mu_p} = 0\,. \tag{8.8.7}$$

オイラー・ラグランジュ運動方程式は,

$$\partial_\mu F^{\mu\mu_1\cdots\mu_p} = -J^{\mu_1\cdots\mu_p} \tag{8.8.8}$$

[‡] ここでは, ゆるい意味で $A_{\mu_1\cdots\mu_p}$ を p 形式と呼んでいる. これは $F=dA$ がテンソルであるためには, A はゲージ変換の分だけテンソルからずれていてもよい. 実際, 既に見たように, 4 次元時空では質量ゼロの粒子のヘリシティ ±1 の生成消滅演算子だけを使って 4 元ベクトルの場を表すことが不可能だ. したがって, $A^\mu(x)$ は (8.1.2) のように, ゲージ変換の部分だけ 4 元ベクトルではない.

となる.

この p 形式ゲージ場は時空の次元が 4 より大きい理論で重要な役割を果たす. 例えば, もっとも単純な 26 次元の弦理論では, 低エネルギーで 2 形式ゲージ場 $A_{\mu\nu}$ で表される弦の固有振動が存在する. しかし, 4 次元時空では p 形式は何も新しいものを与えない.

これを見るには, まず, D 次元時空では D 個以上の添字を持つ完全反対称テンソルは存在しないことに注意する. これより, $p+1 \leq D$ のときのみを考えればよい. 他の $p+1 \leq D$ を満たす $(p+1)$ 形式と同様に, 場の強度 F は $(D-p-1)$ 形式である双対テンソル $\mathcal{F}$ を使って,

$$F^{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} = \epsilon^{\mu_1\cdots\mu_D}\mathcal{F}_{\mu_{p+2}\cdots\mu_D} \tag{8.8.9}$$

と表される. 同様に, p 形式のカレント J も $(D-p)$ 形式の双対カレント $\mathcal{J}$ を使って,

$$J^{\mu_1\cdots\mu_p} = \epsilon^{\mu_1\cdots\mu_D}\mathcal{J}_{\mu_{p+1}\cdots\mu_D} \tag{8.8.10}$$

と書ける. (8.8.8) の場の方程式と (8.8.7) の保存則より,

$$d\mathcal{F} = \mathcal{J}\,, \qquad d\mathcal{J} = 0 \tag{8.8.11}$$

が成立する. 双対カレント $\mathcal{J}$ は閉じているので, これを $(D-p-1)$ 形式 $\mathcal{S}$ を使って,

$$\mathcal{J} = d\mathcal{S} \tag{8.8.12}$$

と書ける. (8.8.11) と (8.8.12) から, $\mathcal{F}$ と $\mathcal{S}$ の差は閉じていて, ポアンカレの定理により, ある $(D-p-2)$ 形式 ϕ を使って,

$$\mathcal{F} = \mathcal{S} + d\phi \tag{8.8.13}$$

と書けることがわかる. $p = D-1$ のときは例外であり, このときには $\mathcal{F}$ と $\mathcal{S}$ は 0 形式で, $d\mathcal{F} = d\mathcal{S}$ の条件は $\mathcal{F}$ と $\mathcal{S}$ は定数分だけ異なっ

ていることを意味する．この場合はゲージ場は自由度を持たない．したがって，以下 $p \leq D-2$ のときを考える．

$p \leq D-2$ では，斉次「マックスウェル」方程式 $dF=0$ は，

$$\partial_{\mu_1}\mathcal{F}^{\mu_1\cdots\mu_{D-p-1}}=0 \tag{8.8.14}$$

となる．これと (8.8.13) より，ϕ に対する場の方程式が次のように得られる．

$$\partial_{\mu_1}(d\phi)^{\mu_1\cdots\mu_{D-p-1}}=-\partial_{\mu 1}\mathcal{S}^{\mu_1\cdots\mu_{D-p-1}}\ . \tag{8.8.15}$$

これは新たなゲージ変換 $\phi\to\phi+d\omega$ のもとで不変だ．この例外は $D{-}p{-}2=0$ のときであり，F を不変にするゲージ変換は $\phi\to\phi{+}c$ となる．ここで，c は任意の定数だ．従って D 次元時空では，p 形式ゲージ場 A の理論は $(D-p-2)$ 形式ゲージ場 ϕ の理論と同等なことがわかる．

なぜ p 形式の場の理論が 4 次元時空で新たな可能性を与えないかがこれでわかる．これまでに見たように，$p \leq D-2$，つまり $p=0$, 1, または 2 の場合を考えればよい．0 形式ゲージ場はスカラー場 S であり，(8.8.5) から $F_\mu=\partial_\mu S$ であり，(8.8.8) の場の方程式は単に $\Box S=-J$ だ．この理論のゲージ不変性とは定数 c を使った場の変換 $S\to S+c$ だ．これは単に，微分相互作用のみをする質量ゼロのスカラー場の理論だ．1 形式ゲージ場は，保存する 4 元カレントに結合する 4 元ベクトル $A^\mu(x)$ であり，これはまさに電磁理論だ．最後に，上に述べた一般的な結果から，4 次元時空での 2 形式ゲージ場は 0 形式ゲージ場に同等であり，微分結合の質量ゼロのスカラー場となる．

補遺：トレース

スピン 1/2 の粒子を含む過程の S 行列と遷移率を計算する際には，しばしばディラックのガンマ行列の積のトレースに出会う．したがっ

て, そのような計算に使われるトレースの表式を求めておくと便利だ.

偶数個のガンマ行列の積については, トレースは,

$$\mathrm{Tr}\left\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2N}}\right\} = 4\sum_{\text{pairings}}\delta_P\prod_{\text{pairs}}\eta_{\text{paired }\mu\text{s}} \tag{8.A.1}$$

で与えられる. ここで, 和は添字 $\mu_1, ...\mu_{2N}$ を異なる対に分けるやり方全てについてとる. 対は整数 $1, 2, ...2N$ を $P1, P2, ...P\cdot(2N)$ へ並べ変えて, μ_{P1} と μ_{P2} を対にし, μ_{P3} と μ_{P4} を対にし, と作っていく. 対同士, また, 対の中で入替えを行っても, 全体の対の取り方としては変化が無いので, 異なる対の取り方は,

$$(2N)!/N!2^N = (2N-1)(2N-3)\cdots 1 \equiv (2N-1)!! \tag{8.A.2}$$

通りある. 同等な対について和をとることを避けるために,

$$P1 < P2,\ P3 < P4, \cdots,\ P\cdot(2N-1) < P\cdot(2N) \tag{8.A.3}$$

と,

$$P1 < P3 < P5 < \cdots \tag{8.A.4}$$

を課すことにする. この方法では, 因子 δ_P は, 対を構成するのに偶数回入替えが必要なら $+1$, 奇数回なら -1 ととる. (8.A.1) の積は N 個の対についてであり, n 番目の対は因子 $\eta_{\mu_{P\cdot(2n-1)}\mu_{P\cdot(2n)}}$ を持つ. 例えば (μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 ... の代わりにμ. ν, ρ, σ... と書いて),

$$\mathrm{Tr}\left\{\gamma_\mu\gamma_\nu\right\} = 4\,\eta_{\mu\nu}\,, \tag{8.A.5}$$

$$\mathrm{Tr}\left\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\right\} = 4\left[\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}\right]\,, \tag{8.A.6}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\kappa\gamma_\eta\right\} = 4\big[&\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\eta_{\kappa\eta} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\kappa}\eta_{\sigma\eta} + \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\eta}\eta_{\sigma\kappa}\\ &-\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}\eta_{\kappa\eta} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\kappa}\eta_{\sigma\eta} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\eta}\eta_{\sigma\kappa} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}\eta_{\kappa\eta} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\kappa}\eta_{\rho\eta}\\ &+\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\eta}\eta_{\rho\kappa} - \eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\rho}\eta_{\sigma\eta} + \eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\sigma}\eta_{\rho\eta} - \eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\eta}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\eta}\eta_{\nu\rho}\eta_{\sigma\kappa}\\ &-\eta_{\mu\eta}\eta_{\nu\sigma}\eta_{\rho\kappa} + \eta_{\mu\eta}\eta_{\nu\kappa}\eta_{\rho\sigma}\big]\end{aligned} \tag{8.A.7}$$

となる.* ガンマ行列が奇数個のときには, 結果は非常に簡単で,

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2N+1}}\} = 0 \tag{8.A.8}$$

となる.

(8.A.1) は数学的帰納法で証明できる. まず最初に,

$$\mathrm{Tr}\left\{\gamma_\mu\gamma_\nu\right\} = -\mathrm{Tr}\left\{\gamma_\nu\gamma_\mu\right\} + 2\mathrm{Tr}\left\{\eta_{\mu\nu}\,1\right\} = -\mathrm{Tr}\left\{\gamma_\mu\gamma_\nu\right\} + 8\eta_{\mu\nu}$$

より, $\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} = 4\eta_{\mu\nu}$ となっていることがわかる. これは (8.A.1) に一致している. 次に (8.A.1) が $N \leq M-1$ で成立しているとしよう. そうすると,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} \\
&= 2\,\eta_{\mu_1\mu_2}\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} - \mathrm{Tr}\left\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\right\} \\
&= 2\,\eta_{\mu_1\mu_2}\ \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} - 2\,\eta_{\mu_1\mu_3}\ \mathrm{Tr}\left\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_{2N}}\right\} \\
&\quad + \mathrm{Tr}\left\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\right\} \\
&= 2\,\eta_{\mu_1\mu_2}\ \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} - 2\,\eta_{\mu_1\mu_3}\ \mathrm{Tr}\left\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\right\} \\
&\quad + 2\,\eta_{\mu_1\mu_4}\ \mathrm{Tr}\left\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_5}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\right\} - \cdots \\
&\quad + 2\,\eta_{\mu_1\mu_{2M}}\ \mathrm{Tr}\left\{\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M-1}}\right\} - \mathrm{Tr}\left\{\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\gamma_{\mu_1}\right\}
\end{aligned}$$

となる. 全ての交換子はトレースがゼロなので, 最後の項は左辺と同じ量を引いていることになる. よって,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} &= \eta_{\mu_1\mu_2}\ \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} \\
&- \eta_{\mu_1\mu_3}\ \mathrm{Tr}\left\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\right\} + \eta_{\mu_1\mu_4}\ \mathrm{Tr}\left\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_5}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\right\} \\
&- \cdots + \eta_{\mu_1\mu_{2M}}\ \mathrm{Tr}\left\{\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M-1}}\right\}
\end{aligned} \tag{8.A.9}$$

---

*現在では多くのディラック行列の積のトレースを計算するためのコンピュータ・プログラムが存在する.[7]

となる．もし, (8.A.1) が $2N-2$ 個のディラック行列のどんな積も正しく与えるならば, (8.A.9) から (8.A.1) が $2N$ 個のディラック行列のどんな積も正しく与えることがわかる．

奇数個のディラック行列の積のトレースがゼロになることを示すには, $-\gamma_\mu$ が相似変換 $-\gamma_\mu = \gamma_5\gamma_\mu(\gamma_5)^{-1}$ で γ_μ と関係していることを使うのが最も簡単だ．トレースはこのような相似変換では不変なので, 奇数個のディラック行列のトレースは, 自分自身に -1 を掛けたものに等しく, ゼロでなければならない．

また, 以下の形のトレースもときどき計算に登場する．

$$\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}\right\}.$$

これは上の γ_5 の無いときと同じ理由で n が奇数のときにゼロとなる．また, $n=0$ と $n=2$ でもゼロとなる．

$$\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\right\} = 0\,, \tag{8.A.10}$$

$$\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\right\} = 0\,. \tag{8.A.11}$$

(これは $\gamma_5 \equiv i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ を代入して $\mathrm{Tr}\{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\}$ で対をとったときに, 各対内の時空の添字が全て同じにはできないことからいえる． これは $\mathrm{Tr}\{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_\mu\gamma_\nu\}$ についても同じだ.) $n=4$ では, $\mathrm{Tr}\left\{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\right\}$ において, μ,ν,ρ,σ が $0,1,2,3$ の何らかの置換になっているときにのみ, 各対内の時空の添字を全て同じにできる．また, 異なるガンマ行列の反可換性より, μ,ν,ρ,σ の置換のもとで, このトレースは奇だ．したがって, $\mathrm{Tr}\{\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\}$ は完全反対称テンソル $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ に比例する．比例係数は, μ,ν,ρ,σ が $0,1,2,3$ のときに $\epsilon_{1234} \equiv -1$ を使って決める．このようにして,

$$\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\right\} = 4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{8.A.12}$$

がわかる．γ_5 と 6, 8, またはそれ以上のディラック行列との積のトレースは上で (8.A.12) を証明するのに使ったのと同じ方法で計算できる．

問題

1. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 過程の微分断面積と全断面積を e の最低次で求めよ．ここで，電子とミュー中間子のスピンは観測しないとせよ．また，電子とミュー中間子の電磁理論のラグランジアンについては最も簡単なものを使え．

2. 荷電スカラー場 Φ が次のラグランジアンで電磁場と相互作用する理論の正準量子化をクーロン・ゲージで行え．

$$\mathcal{L} = -(D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - m^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} .$$

ここで，

$$D_\mu\Phi \equiv \partial_\mu\Phi - iqA_\mu\Phi , \qquad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

だ．ハミルトニアンを場 $\mathbf{A}$, Φ, $\Phi^\dagger$ とそれらの正準共役量を使って表せ．また，相互作用表示の $V(t)$ を相互作用表示の場とそれらの微分を使って表せ．

3. 問題 2 の結果を使って，質量がゼロでない荷電スカラー粒子による光子の散乱の微分断面積と全断面積を e の最低次で求めよ．

4. 電磁場と相互作用し，質量がゼロでない荷電ベクトル粒子の場のゲージ不変なラグランジアンを書き下せ．

5. 電子・電子散乱の微分断面積を e の最低次で求めよ．その際には，始状態と終状態のスピンは観測しないとせよ．

参考文献

1. 例えば，M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987) の 2.2 節を見よ．

1a. V. Fock, *Z. f. Phys.* **39**, 226 (1927); H. Weyl, *Z. Phys.* **56**, 330 (1929). 「ゲージ不変性」という用語は, H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, 第 3 版 (Springer-Verlag, Berlin, 1920) によるスケール変換に関する初期の推測との類似からきている. F. London, *Z. f. Phys.* **42**, 375 (1927) も見よ. この歴史は, C. N. Yang の City College of New York での講演 (未出版) でも述べられた.

2. 電磁理論でのクーロン・ゲージの使用は, ここで述べた光子にヘリシティ ±1 以外を持たせるべきではないというのとほぼ同じ理由でシュウィンガーによって喧伝された. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **78**, 1439 (1948); **127**, 324 (1962); *Nuovo Cimento* **30**, 278 (1963) を見よ.

3. R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **101**, 769 (1949), 8 節.

4. O. Klein and Y. Nishina, *Z. f. Phys.* **52**, 853 (1929); Y. Nishina, 同上, 869 (1929); また, I. Tamm, *Z. f. Phys.* **62**, 545 (1930) も見よ.

5. 例えば, S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972) の 4.11 節を見よ.

6. 幾何学と p 形式の読みやすい紹介としては, H. Flanders, *Differential Forms* (Academic Press, New York, 1963) (フランダース著 「微分形式の理論 およびその物理科学への応用」岩堀長慶訳, 岩波書店) がある.

7. T. West, *Comput. Phys. Commun.* **77**, 286 (1993).

第9章

経路積分法

7章と8章では正準量子化演算子法を使い, 種々の理論でのファインマン則を導いた. 多くの場合, 例えば, 微分結合をするスカラー場とか質量がゼロまたは有限のベクトル場のような多くの場合には, この過程は一本道であるが, 面倒なものだ. 相互作用ハミルトニアンはラグランジアンの相互作用項の符号を変えた共変的な項に加えて, プロパゲーターに含まれる非共変項を打消す非共変項を含んでいることがわかった. さらに, 電磁理論の場合にはこの非共変項(クーロン・エネルギー) は時間的には局所的だが, 空間的には局所的ですらない. しかし, 最終結果は極めて単純だ. ファインマン則は, 共変なプロパゲーターと, ラグランジアンの相互作用項の符号を変えたものから得られる頂点とからできている. これらの単純な結果を得る過程は7章と8章で扱った理論でもすでに面倒であったが, 3巻で述べる非可換ゲージ理論や一般相対論などのより複雑な理論では絶えられない程に困難になってくる. そのため, ラグランジアンから直接にファインマン則の最終的なローレンツ共変な形を出す方法が是非欲しくなる.

幸運にもそのような方法は存在する. それは量子力学での経路積分法によって提供される. これは, ファインマンのプリンストン大学の

博士論文[1] で初めて, 非相対論的量子力学でハミルトニアンよりもラグランジアンを直接に扱う方法として与えられた. この意味では, これはディラックのそれ以前の仕事[2] に触発されたといえる. 経路積分法は後にファインマンがダイヤグラム法を導くのに (直感に満ちた推察と共に) ある役割を果たした. ファインマン則は 1950 年代には広く使われるようになったものの, (私も含む) ほとんどの物理学者はシュウィンガーと朝永の演算子法を使って導くのが常であった. この演算子法はファインマンが独自の方法で得たダイヤグラム則を再現することが, 1949 年にダイソンによって示されていたからだ.

経路積分は, 1960 年代後半になって, ファデーフ (Faddev) とポポフ (Popov),[4] また, ド・ウィット (de Witt)[5] によって非可換ゲージ理論と一般相対論に用いられ, 復活を遂げた. 1971 年にト・フーフト ('t Hooft)[6] は経路積分を使って自発的に対称性が破れたゲージ理論 (これは 4 巻で論じる) のファインマン則を導いたが, これが, ほとんどの理論家にとって転回点となった. 特に, これは電磁相互作用と弱い相互作用の理論で, 高エネルギーでの振舞いが明白になるゲージを使っていた. その直後に, これも 4 巻で述べるが, S 行列には, 結合定数がゼロの点が真性特異点となり, そのために摂動論のどの次数でも出てこない項があるが, 経路積分法を使うとこれを取り入れることが可能であることがわかった. これ以降, 経路積分は場の量子論を使う全ての物理学者にとって欠かすことの出来ない道具となった.

こう述べてくると, 経路積分がそれ程便利なのならばなぜ 7 章で正準形式を導入する手間を取ったのか, 読者は疑問に思うかもしれない. 実際, ファインマンは当初, 経路積分を通常の量子力学の正準形式に取って代わるものとして考えていたようだ. しかし, 正準形式から始める理由が二つある. 第一は, 原理的な問題だ. 経路積分法は明白にローレンツ不変なダイヤグラム則を与えるが, このように構成された S 行列がなぜユニタリーなのか自明ではない. 私が知る限り, 経路積

分形式がユニタリーな S 行列を与えることを示すには, 経路積分を使って, ユニタリー性が明らかな正準形式を再構成することだ. ここには, 困難度の保存則とでもいったものがある. つまり, 正準形式を使えばユニタリー性は自明だがローレンツ不変性はわかりにくくなり, 経路積分を使えばローレンツ不変性は自明だがユニタリー性はとても自明だとは言えなくなる. ここでは経路積分を正準形式から導くので, どちらの方法でも同じ S 行列が得られて, S 行列がローレンツ不変でユニタリーとなるわけだ.

正準形式を最初に導入する第二の理由はもっと実際的なものだ. それは, 幾つかの重要な理論では, ファインマンの経路積分法を最も単純に構成しプロパゲーターと相互作用の頂点を直接にラグランジアンからとると誤った結果が得られるからだ. この一例は非線形 σ 模型で, ラグランジアン密度が $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g_{k\ell}(\phi)\partial_\mu\phi^k\partial^\mu\phi^\ell$ となるものだ. このような理論ではファインマン則を直接にラグランジアン密度からとると, ただ間違っているだけでなく, ユニタリーでさえない S 行列が得られる. また, その S 行列はスカラー場の定義にも依存してしまう.[7] この章では経路積分を正準形式から導き, 最も単純なファインマン経路積分にどのような頂点が加わるかを見ることにする.

9.1 一般的な経路積分形式

一般的な量子力学系を考えて, その「座標」を Q_a, その共役「運動量」を P_b として, これらは以下の正準交換関係を満たすとする.*

$$[Q_a,\ P_b] = i\,\delta_{ab}\ , \tag{9.1.1}$$

$$[Q_a,\ Q_b] = [P_a,\ P_b] = 0\ . \tag{9.1.2}$$

*ここで, 暗黙のうちに, 全ての第一類拘束条件はゲージを選んで消去されて, 残った第二類拘束条件は 7.6 節のように拘束された自由度を拘束されていない Q_a と P_a で「解いて」あるとしている. 経路積分を拘束系に直接適用する方法はファデーフによって与えられている.[8]

(この節と続く 3 節では反交換関係ではなく交換関係を満たすボソン的演算子に話を限る. ここでの結果は 9.5 節でフェルミオン的演算子を含むように拡張する.) 場の理論では添字 a は位置 $\mathbf{x}$ とローレンツ成分および粒子の種類を表す離散的な添字 m からなり, 便宜的に,

$$Q_{\mathbf{x},m} \equiv Q_m(\mathbf{x}), \tag{9.1.3}$$

$$P_{\mathbf{x},m} \equiv P_m(\mathbf{x}) \tag{9.1.4}$$

と書く. また, (9.1.1) のクロネッカーのデルタは場の理論では,

$$\delta_{\mathbf{x},m\,;\,\mathbf{y},n} \equiv \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{mn} \tag{9.1.5}$$

と解釈する. しかし, ここではより簡略に (9.1.1) と (9.1.2) の記法をとる. これらは, ある特定の時刻 (通常 $t=0$) が選ばれている, つまり, 「シュレーディンガー表示」の演算子だ. ハイゼンベルグ表示の時刻に依存する演算子も後で考察する.

座標 Q_a は全て互いに可換なので, 固有値 q_a を持つ同時固有状態 $|q\rangle$ が存在する.

$$Q_a|q\rangle = q_a\,|q\rangle\,. \tag{9.1.6}$$

(ここで小文字 q と p を固有値を表わすために使っていて, 7 章の相互作用表示の演算子ではない. しかし, この章では相互作用表示は使わないので混乱は起きないはずだ.) 固有ベクトルは直交する.

$$\langle q'|q\rangle = \prod_a \delta(q'_a - q_a) \equiv \delta(q'-q)\,. \tag{9.1.7}$$

したがって完全性の関係式は,

$$1 = \int \prod_a dq_a\,|q\rangle\,\langle q| \tag{9.1.8}$$

となる. 同様に P_a についても正規直交完全系が存在する.

$$P_a|p\rangle = p_a|p\rangle\,, \tag{9.1.9}$$

$$\langle p'|p\rangle = \prod_a \delta(p'_a - p_a) \equiv \delta(p' - p)\ , \tag{9.1.10}$$

$$1 = \int \prod_a dp_a\ |p\rangle\ \langle p|\ . \tag{9.1.11}$$

(9.1.1) より, これら二つの完全系の間の内積は通常どおり, 次のように計算される.**

$$\langle q\,|p\rangle = \prod_a \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \exp(iq_a p_a)\ . \tag{9.1.12}$$

ハイゼンベルグ表示では, 演算子 Q と P は以下の時間依存性を持つ.

$$Q_a(t) \equiv\ \exp(iHt)\, Q_a\ \exp(-iHt)\ , \tag{9.1.13}$$

$$P_a(t) \equiv\ \exp(iHt)\, P_a\ \exp(-iHt)\ . \tag{9.1.14}$$

ここで H は全ハミルトニアンだ. これらは固有状態 $|q;t\rangle$ と $|p;t\rangle$ を持つ.

$$Q_a(t)|q;t\rangle = q_a|q;t\rangle\ , \tag{9.1.15}$$

$$P_a(t)|p;t\rangle = p_a|p;t\rangle\ . \tag{9.1.16}$$

これらの状態は以下で与えられる.

$$|q;t\rangle = \exp(iHt)|q\rangle\ , \tag{9.1.17}$$

$$|p;t\rangle = \exp(iHt)|p\rangle\ . \tag{9.1.18}$$

($|q;t\rangle$ は固有値 q_a を持つ $Q_a(t)$ の固有状態であり, $|q\rangle$ を時間 t だけ発展させたものではないことに注意して欲しい. このために, 時間依

** この証明は点粒子の量子力学の場合と同じようにする. (9.1.1) から P_b が q を基底とした波動関数には $-i\partial/\partial q_b$ として働くことがわかる. (9.1.12) の右辺はこの基底での P の固有状態の波動関数だ. 因子 $\prod 1/\sqrt{2\pi}$ は (9.1.10) の規格化条件で決定される.

存性が $\exp(-iHt)$ ではなく, $\exp(iHt)$ になっている.) この状態は明らかに完全性と正規直交性を満たす.

$$\langle q';t|q;t\rangle = \delta(q'-q)\ , \tag{9.1.19}$$

$$\langle p';t|p;t\rangle = \delta(p'-p)\ , \tag{9.1.20}$$

$$\int \prod_a dq_a\ |q;t\rangle\ \langle q;t| = 1\ , \tag{9.1.21}$$

$$\int \prod_a dp_a\ |p;t\rangle\ \langle p;t| = 1\ . \tag{9.1.22}$$

また,

$$\langle q;t|p;t\rangle = \prod_a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(iq_a p_a) \tag{9.1.23}$$

も成立する.

もし, 時刻 t で我々の系が確定的に $|q;t\rangle$ の状態にあったとすると, 時刻 t' での観測で $|q';t'\rangle$ にある確率振幅は内積 $\langle q';t'|q;t\rangle$ で与えられる. 我々の中心的な力学的問題はこの内積を計算することにある.

これは t' と t が無限小しか離れていないときにはたやすい. いま, $t' = \tau + d\tau$ と $t = \tau$ とする. (9.1.17) を使うと,

$$\langle q';\tau + d\tau|q;\tau\rangle = \langle q';\tau|\exp(-iHd\tau)|q;\tau\rangle \tag{9.1.24}$$

を得る. ハミルトニアン H は関数 $H(Q,P)$ として与えられているが, (9.1.13) と (9.1.14) は相似変換であり, H が自分自身と可換であるので, それを $Q(t)$ と $P(t)$ の同じ関数として書ける.

$$H \equiv H(Q,P) = e^{iHt}H(Q,P)e^{-iHt} = H\Big(Q(t),\ P(t)\Big)\ . \tag{9.1.25}$$

この関数は (9.1.1) と (9.1.2) の交換関係を使って Q と P を入れ替えれば, 定数係数が異なる種々の形に書ける. 全ての Q が全ての P の左にある標準形をとるのが便利だ. 例えば, ハミルトニアンに $P_aQ_bP_c$ の形の項があれば, これを, $P_aQ_bP_c = Q_bP_aP_c - i\ \delta_{ab}P_c$ と書き換え

る．この約束では, (9.1.24) のハミルトニアンの $Q_a(t)$ はその固有値 q'_a で置き換えることができる.[†] $P(t)$ を扱うには, (9.1.23) を使って, $|q;\tau\rangle$ を P の固有状態 $|p;\tau\rangle$ で展開すればよい．こうすると,

$$\begin{aligned}\langle q';\tau+d\tau \mid q;\tau\rangle &= \int\prod_a dp_a\,\langle q';\tau|\exp\Big(-iH(Q(\tau),P(\tau))d\tau\Big)|p;\tau\rangle \\ &\qquad\times\langle p;\tau|q;\tau\rangle \\ &= \int\prod_a\frac{dp_a}{2\pi}\ \exp\left[-iH(q',p)d\tau+i\sum_a(q'_a-q_a)p_a\right] \quad (9.1.26)\end{aligned}$$

がわかる．ここで, どの p_a も $-\infty$ から $+\infty$ まで積分されている．

より一般的な有限時間間隔の場合を調べる．$\langle q';t'|q;t\rangle$ を $t<t'$ について計算するために, t から t' までの時間間隔を $t,\tau_1,\tau_2,\cdots\tau_N,t'$ という段階に分ける．ここで,

$$\tau_{k+1}-\tau_k = d\tau = (t'-t)/(N+1) \qquad (9.1.27)$$

とする．各時刻 τ_k で状態 $|q;\tau_k\rangle$ の完全系について和をとる．

$$\begin{aligned}\langle q';t'|q;t\rangle = \int dq_1\cdots dq_N\langle q';t'|q_N;\tau_N\rangle\langle q_N;\tau_N|q_{N-1};\tau_{N-1}\rangle \\ \cdots\langle q_1;\tau_1|q;t\rangle. \qquad (9.1.28)\end{aligned}$$

(9.1.26) を代入すると, これは,

$$\begin{aligned}\langle q';t'|q;t\rangle &= \int\left[\prod_{k=1}^{N}\prod_a\ dq_{k,a}\right]\left[\prod_{k=0}^{N}\prod_a\ dp_{k,a}/2\pi\right] \\ &\times\exp\left[i\sum_{k=1}^{N+1}\left\{\sum_a(q_{k,a}-q_{k-1,a})p_{k-1,a}-H(q_k,p_{k-1})d\tau\right\}\right] \quad (9.1.29)\end{aligned}$$

となる．ここで,

$$q_0\equiv q\ , \qquad q_{N+1}\equiv q' \qquad (9.1.30)$$

[†] これが可能なのは, $d\tau$ が微小なので $\exp(-iH\,d\tau)$ が H について線形であることによる．

とした.

(9.1.29) の結果は, はるかにエレガントな形にできる. 滑らかな内挿関数 $q(\tau)$ と $p(\tau)$ を,

$$q_a(\tau_k) \equiv q_{k,a} \ , \qquad p_a(\tau_k) \equiv p_{k,a} \tag{9.1.31}$$

を満たすように定義する. $d\tau \to 0$ (つまり $N \to \infty$) の極限では, (9.1.29) の指数関数の引数は単に τ についての積分になる.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N+1} \left\{ \sum_a (q_{k,a} - q_{k-1,a}) p_{k-1,a} - H(q_k, p_{k-1}) d\,\tau \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{N+1} \left\{ \sum_a \dot{q}_a(\tau_k) p_a(\tau_k) - H\Big(q(\tau_k), p(\tau_k)\Big) \right\} d\,\tau + O(d\tau^2) \\
&\to \int_t^{t'} \left\{ \sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H\Big(q(\tau), p(\tau)\Big) \right\} d\,\tau \, .
\end{aligned} \tag{9.1.32}$$

さらに, $q(\tau), p(\tau)$ の関数についての積分を,

$$\int \prod_{\tau,a} dq_a(\tau) \prod_{\tau,b} \frac{dp_b(\tau)}{2\pi} \cdots \equiv \lim_{d\tau \to 0} \int \prod_{k,a} dq_{k,a} \prod_{k,b} \frac{dp_{k,b}}{2\pi} \cdots \tag{9.1.33}$$

と定義する. このようにすると, (9.1.29) は拘束された多重積分,

$$\begin{aligned}
\langle q'; t' | q; t \rangle = &\int_{\substack{q_a(t) = q_a \\ q_a(t') = q'_a}} \prod_{\tau,a} dq_a(\tau) \prod_{\tau,b} \frac{dp_b(\tau)}{2\pi} \\
&\times \exp\left[i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H\Big(q(\tau), p(\tau)\Big) \right\} \right]
\end{aligned} \tag{9.1.34}$$

となる. これを**経路積分** (path integral) とよぶ. これは $\tau = t$ での q から $\tau = t'$ での q' までの $q(\tau)$ の全ての経路と $p(\tau)$ 全てについての積分だからだ. 行列要素をこのように経路積分で書くと, 9.3 節でわかるように, H の結合定数で展開して計算するのが非常に簡単になるという利点がある.

経路積分形式では $\langle q';t'|q;t\rangle$ のような遷移確率振幅のみならず, 一般の演算子の時間順序積 $\mathcal{O}(P(t),Q(t))$ の状態 $\langle q';t'|$ と $|q,t\rangle$ での行列要素も計算できる. これらの演算子を (H と異なり) 全ての P を左へ, 全ての Q を右へ動かしたもので定義しておくのが便利だ. そうすると, そのような任意の演算子 $\mathcal{O}[P(t),Q(t)]$ を (9.1.26) に入れて,

$$\langle q';\tau+d\tau|\mathcal{O}\Big(P(t),Q(t)\Big)|q;\tau\rangle = \int\prod_d dp_a$$

$$\times\ \langle q';\tau|\exp\left(-iH\Big(Q(\tau),P(\tau)\Big)d\tau\right)\ |p;\tau\rangle\langle p;\tau|\mathcal{O}\Big(P(\tau),Q(\tau)\Big)|q;\tau\rangle$$

$$= \int\prod_a \frac{dp_a}{2\pi}\exp\left[-iH(q',p)d\tau + i\sum_a(q'_a-q_a)p_a\right]\mathcal{O}(p,q) \qquad (9.1.35)$$

を得る. $t_A > t_B > \cdots$ での積 $\mathcal{O}_A\Big(P(t_A),Q(t_A)\Big)\,\mathcal{O}_B\Big(P(t_B),Q(t_B)\Big)$ $\cdots$ の行列要素を計算するには $\mathcal{O}$ の演算子を (9.1.28) の適切な状態の間に入れて, (9.1.35) を使う. 例えば, もし, 時刻 t_A が τ_k と τ_{k+1} の間ならば, $\mathcal{O}_A\Big(P(t_A),Q(t_A)\Big)$ を $\langle q_{k+1};\tau_{k+1}|$ と $|q_k;\tau_k\rangle$ の間に入れる. (9.1.28) では状態の和は時間順序に並んでいる. したがって, この操作は, 最初に仮定したように $t_A > t_B > \cdots$ のときにのみ許される. 前と同じステップを辿って, 一般的な経路積分表式が次のように得られる.

$$\langle q',t'|\mathcal{O}_A\Big(P(t_A),Q(t_A)\Big)\mathcal{O}_B\Big(P(t_B),Q(t_B)\Big)\cdots|q,t\rangle$$

$$= \int_{\substack{q_a(t)=q_a\\ q_a(t')=q'_a}} \prod_{\tau,a}dq_a(\tau)\prod_{\tau,b}\frac{dp_b(\tau)}{2\pi}\ \mathcal{O}_A\Big(p(t_A),q(t_A)\Big)\mathcal{O}_B\Big(p(t_B),q(t_B)\Big)$$

$$\cdots\times\exp\left[i\int_t^{t'}d\tau\left\{\sum_a\dot{q}_a(\tau)p_a(\tau)-H\Big(q(\tau),p(\tau)\Big)\right\}\right]. \qquad (9.1.36)$$

この結果は,

$$t' > t_A > t_B > \cdots > t \qquad (9.1.37)$$

と時間の順序に演算子が並んでいるときにのみ正しい. しかし, (9.1.36) の右辺では時間変数の順序については何も指定がない. したがって,

(9.1.36) の右辺のような経路積分で $t_A, t_B, \cdots$ (全て $t < t'$ を満たす t と t' 間にある限り) が任意の順序のとき, この経路積分は (9.1.36) の左辺で (左から右へ) 時刻が早くなる順序に並べたものの行列要素だとわかる. つまり, $t_A, t_B, \cdots$ が任意の順序のとき,

$$\langle q', t'|T\Big\{\mathcal{O}_A\Big(P(t_A), Q(t_A)\Big), \mathcal{O}_B\Big(P(t_B), Q(t_B)\Big), \cdots\Big\}|q, t\rangle$$
$$= \int_{\substack{q_a(t) = q_a \\ q_a(t') = q'_a}} \prod_{\tau,a} dq_a(\tau) \prod_{\tau,b} \frac{dp_b(\tau)}{2\pi}\, \mathcal{O}_A\Big(p(t_A), q(t_A)\Big)\mathcal{O}_B\Big(p(t_B), q(t_B)\Big)$$
$$\cdots \times \exp\left[i\int_t^{t'} d\tau \left\{\sum_a \dot{q}_a(\tau)p_a(\tau) - H\Big(q(\tau), p(\tau)\Big)\right\}\right] \quad (9.1.38)$$

となる. ここで, T は通常の時間順序積を意味する.

多分ここで, (9.1.38) の c 数の関数 $q_a(\tau)$, $p_a(\tau)$ は単なる積分変数であることを強調しておくほうがいいだろう. 特に, それらは古典ハミルトン力学の運動方程式,

$$\dot{q}_a(\tau) - \frac{\partial H(q(\tau), p(\tau))}{\partial p_a(\tau)} = 0\,, \quad (9.1.39)$$

$$\dot{p}_a(\tau) + \frac{\partial H(q(\tau), p(\tau))}{\partial q_a(\tau)} = 0 \quad (9.1.40)$$

には従わない. ((9.1.38) のハミルトニアン $H(q(\tau), p(\tau))$ はこの理由で τ について定数ではない.) しかしながら, 経路積分は限られた意味でこれらの運動方程式に従う. いま, (9.1.38) の関数のうち一つ, たとえば, $\mathcal{O}_A\Big(p(t_A),\ q(t_A)\Big)$ が (9.1.39) か (9.1.40) の左辺であったとしよう. ($t < t_A < t'$ では) 以下の式が成立する.

$$\left(\dot{q}_a(t_A) - \frac{\partial H(q(t_A), p(t_A))}{\partial p_a(t_A)}\right)\ \exp\Big(iI[q, p]\Big)$$
$$= -i\frac{\delta}{\delta p_a(t_A)}\ \exp\Big(iI[q, p]\Big),$$
$$\left(\dot{p}_a(t_A) - \frac{\partial H(q(t_A), p(t_A))}{\partial q_a(t_A)}\right)\ \exp\Big(iI[q, p]\Big)$$

$$= i\frac{\delta}{\delta q_a(t_A)}\ \exp\Big(iI[q,p]\Big).$$

ここで, iI は (9.1.38) の指数関数の引数だ.

$$I[q,p] \equiv \int_t^{t'} d\tau \left\{\sum_a \dot{q}_a(\tau)p_a(\tau) - H\Big(q(\tau),p(\tau)\Big)\right\}\ .$$

t_A が t にも t' にも近づかない限り, $q_a(t_A)$ と $p_a(t_A)$ についての積分は拘束されていない. したがって, これらの積分が収束するという妥当な仮定のもとで, このような汎関数微分の積分は消える. したがって, (9.1.38) の経路積分はもし $\mathcal{O}_A(p,q)$ を (9.1.39) か (9.1.40) の運動方程式の左辺ととる限りゼロになる.

これらの簡単な法則は, 積分変数 $q_a(t_A)$, $p_a(t_A)$ が (9.1.38) の $\mathcal{O}_B$, $\mathcal{O}_C$ 等の他の関数に含まれる $q_a(t_B)$, $p_a(t_B)$ などの変数のどれからも独立なときにのみ正しい. したがって, t_A を t や t' のみならず, t_B, t_C 等にも近づけないことが必要だ. t_A がたとえば t_B に近づくときには, 経路積分は $\delta(t_A - t_B)$ かその微分に比例するゼロでない項を含む. これらのデルタ関数は演算子形式で時間順序積に陰に含まれている階段関数の時間微分から出る項と同じだ.

(9.1.34) と (9.1.38) の経路積分を計算するためには, 古典的ハミルトニアン, つまり, c 数の関数 $H(q,p)$ を知っているだけでよい. 経路積分で理論を定義するなら, この経路積分は, 多くの可能な量子力学的なハミルトニアン (これらは Q と P の順序が異なるものに相当する) のうち, どれを使ったことになっているのかという問題が自然に発生する. われわれの導出はこれに答を与えている. 量子力学的ハミルトニアンは全ての Q を左に, 全ての P を右に置いたものだ. しかし, この処方をあまり重要視しすぎるのは誤りといえる. (9.1.34) か (9.1.38) の経路積分に現れる測度, $\Pi\, dq_a(\tau)\, \Pi\, dp_b(\tau)$ には非常に多くの解釈がある. われわれの Q を全て P の左に置く処方は, 測度が (9.1.31)–(9.1.33) に従って解釈されるときにのみ正しい. 他の測度で

は, 演算子順序についての異なった処方が得られる. 実際には, 異なった処方をとればハミルトニアンに現れる様々な項の定数係数の値が異なるが, これらはいずれ任意パラメータとして理論を構成するので, この問題は深刻なものではない.

(9.1.38) の一般的経路積分を数値計算や厳密な定理の基盤として使うのは難しい. これらの目的には, 経路積分法を使って, t を虚数の $-ix_4$ に置き換えたユークリッド空間での振幅を計算するほうがよい. これは, このとき (9.1.38) の指数関数の引数は負の実の量となり, ジグザグの経路は被積分関数を経路から別の経路へ激しく振動させる代わりに, すべて指数関数的に押さえられるからだ. ここではこれ以上立ち入らないが, 場の量子論は最初からユークリッド時空でのファインマン振幅をつかって構成できる.[8a] ある種の妥当な仮定をして, ユークリッド時空でのファインマン振幅からミンコフスキー時空での振幅を再構成することが可能だ.[8b] しかし, 摂動論でファインマン振幅を計算するためだけの目的ならば, 経路積分をミンコフスキー時空で扱うだけでよい.

9.2 S 行列へ

既に述べたように, 9.1 節の一般的な量子力学での結果は, 添字 a を空間の座標 $\mathbf{x}$ およびスピンと粒子の種類の添字 m と表し, $Q_a(t)$ と $P_a(t)$ を $Q_m(\mathbf{x},t)$ と $P_m(\mathbf{x},t)$ にすることによって, 場の理論に適切な形に書きかえることができる. そうすると (9.1.38) は 以下の形となる.*

$$\langle q',t'|T\left\{\mathcal{O}_A\left[P(t_A),Q(t_A)\right],\ \mathcal{O}_B\left[P(t_B),Q(t_B)\right],\cdots\right\}|q,t\rangle$$

---

*ここで, H と $\mathcal{O}$ は角括弧で書いている. これは $H[q(t),p(t)]$ と $\mathcal{O}[p(t),q(t)]$ がある時刻 t での $q_m(\mathbf{x},t)$ と $p_m(\mathbf{x},t)$ の汎関数であることを明確にするためだ.

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\substack{q_m(\mathbf{x},t)=q_m(\mathbf{x}) \\ q_m(\mathbf{x},t')=q'_m(\mathbf{x})}} \prod_{\tau,\mathbf{x},m} dq_m(\mathbf{x},\tau) \prod_{\tau,\mathbf{x},m} \frac{dp_m(\mathbf{x},\tau)}{2\pi} \\
&\times \mathcal{O}_A\Big[p(t_A),q(t_A)\Big]\ \mathcal{O}_B\Big[p(t_B),q(t_B)\Big]\cdots \\
&\times \exp\left[i\int_t^{t'} d\tau \left\{\int d^3x\ \dot{q}_m(\mathbf{x},\tau)p_m(\mathbf{x},t) - H\Big[q(\tau),p(\tau)\Big]\right\}\right]. \qquad (9.2.1)
\end{aligned}
$$

しかしながら, 場の理論では (9.2.1) は我々が望む形になっているとはいえない. 実験家は量子場 Q の固有状態 $\langle q',t'|$ と $|q,t\rangle$ の間の遷移確率振幅を測定するのではなく, $t\to-\infty$ と $t\to+\infty$ でいろいろな粒子を一定個数もつ状態間の確率振幅である S 行列要素を測定する. これらの状態は「in」状態と「out」状態と呼ばれ, それぞれ, 運動量, スピンの z 成分 (またはヘリシティ) などで特徴づけられたいろいろな粒子の集合を α と β で記して, $|\alpha,\ \text{in}\rangle$ と $|\beta,\ \text{out}\rangle$ と書く. これらの状態間での時間順序積の行列要素 (もしくは, 単に内積) を計算するには, (9.2.1) に「波動関数」 $\langle\beta,\text{out}|q',t'\rangle$ と $\langle q,t|\alpha,\text{in}\rangle$ をかける. これらの状態は固定された時刻 t と t' でのものだが, ここでは便利のため, それぞれ $-\infty$ と $+\infty$ に選ぶ. そして, 波動関数の「変数」 $q_m(\mathbf{x})$ と $q'_m(\mathbf{x})$ について積分を行う. しかし, $q_m(\mathbf{x},\tau)$ についての経路積分を,

$$
q_m(\mathbf{x},+\infty)=q'_m(\mathbf{x})\ , \qquad q_m(\mathbf{x},-\infty)=q_m(\mathbf{x}) \qquad (9.2.2)
$$

の条件で拘束して, $q'_m(\mathbf{x})$ と $q_m(\mathbf{x})$ について積分する代わりに, $q_m(\mathbf{x},\tau)$ (と $p_m(\mathbf{x},\tau)$) についての拘束されない積分を行い, 波動関数の変数を (9.2.2) で与えられるものに決めればよい.

$$
\begin{aligned}
&\langle\beta,\text{out}|T\left\{\mathcal{O}_A\Big[P(t_A),Q(t_A)\Big],\ \mathcal{O}_B\Big[P(t_B),Q(t_B)\Big],\cdots\right\}|\alpha,\ \text{in}\rangle \\
&\quad = \int \prod_{\tau,\mathbf{x},m} dq_m(\mathbf{x},\tau) \prod_{\tau,\mathbf{x},m} (dp_m(\mathbf{x},\tau)/2\pi) \\
&\qquad \times \mathcal{O}_A\Big[p(t_A),q(t_A)\Big]\ \mathcal{O}_B\Big[p(t_B),q(t_B)\Big]\cdots
\end{aligned}
$$

$$\times \exp\left[i\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{\int d^3x\ \dot{q}_m(\mathbf{x},\tau)p_m(\mathbf{x},\tau) - H\Big[q(\tau),p(\tau)\Big]\right\}\right]$$
$$\times \langle\beta,\ \text{out}|q(+\infty);+\infty\rangle\ \langle q(-\infty);-\infty|\alpha,\ \text{in}\rangle\ . \tag{9.2.3}$$

ちなみに, この結果からすぐに,** (6.4.3) が導ける. この定理は全ての質量殻外のファインマン・ダイアグラムの和とハイゼンベルグ表示の演算子のエネルギー固有状態間の行列要素とを関係付けるために繰り返し使う.

ここで, (9.2.3) に最終的に因子の対として現れる波動関数をどう計算するかを考察しなければならない. まず, もっとも単純で重要な場合, つまり真空を考える. (6.4 節で S 行列要素は時間順序積の真空期待値から容易に得られることを見た.) 通常のように $t \to \pm\infty$ では, 行列要素は相互作用がないとして計算できる. したがって「in」真空と「out」真空は以下の条件で定義される.

$$\begin{aligned} a_{\text{in}}(\mathbf{p},\sigma,n)|\text{VAC},\text{in}\rangle &= 0\ , \\ a_{\text{out}}(\mathbf{p},\sigma,n)|\text{VAC},\text{out}\rangle &= 0\ . \end{aligned} \tag{9.2.4}$$

ここで, a_{in} と a_{out} はそれぞれ, $t \to -\infty$ と $t \to +\infty$ での演算子 $Q_m(\mathbf{x},t)$ の平面波 $\exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - iEt)$ による展開の係数だ. たとえば,

---

** ここで, ハミルトニアンが $H[P(t),Q(t)] + \sum_A \int d^3x\ \epsilon_A(\mathbf{x},t)\mathcal{O}_A(\mathbf{x},t)$ であるときには, S 行列は (9.2.3) によって以下で与えられることに注意するだけでよい.

$$\langle\beta,\text{out}|\alpha,\ \text{in}\rangle_\epsilon = \int \prod_{\tau,\mathbf{x},m} dq_m(\mathbf{x},\tau) \prod_{\tau,\mathbf{x},m} \big(dp_m(\mathbf{x},\tau)\big/2\pi\big)$$
$$\times \exp\left[i\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\left\{\int d^3x\ \dot{q}_m(\mathbf{x},\tau)p_m(\mathbf{x},\tau) - H\Big[q(\tau),p(\tau)\Big]\right.\right.$$
$$\left.\left. -\sum_A \int d^3x\ \epsilon_A(\mathbf{x},t)O_A(\mathbf{x},t)\right\}\right]$$
$$\times \langle\beta,\ \text{out}|q(+\infty);+\infty\rangle\ \langle q(-\infty);-\infty|\alpha,\ \text{in}\rangle\ .$$

(6.4.3) の左辺はこの表現の $\epsilon = 0$ での ϵ_a, ϵ_b などについての微分であり, (9.2.3) の右辺を与える. そして, (9.2.3) をもう一度使うと, すぐに (6.4.3) の右辺がでる.

中性のスピンゼロ粒子の実スカラー場では,

$$\Phi(\mathbf{x},t) \stackrel{t\to\mp\infty}{\longrightarrow} (2\pi)^{-3/2}\int d^3p(2E)^{-1/2}\Big[a_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}+\text{H.c.}\Big], \tag{9.2.5}$$

$$\begin{aligned}\Pi(\mathbf{x},t) &\stackrel{t\to\mp\infty}{\longrightarrow} \dot{\Phi}(\mathbf{x},t)\\ &\stackrel{t\to\mp\infty}{\longrightarrow} -i(2\pi)^{-3/2}\int d^3p(E/2)^{1/2}\Big[a_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}-\text{H.c.}\Big]\end{aligned} \tag{9.2.6}$$

となる. ここで, $p^0\equiv E\equiv\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ であり, Q と P の代わりに, スカラー場については便宜的に Φ と Π を使った. また, 不必要な添字 m,σ,n も落とした. フーリエ逆展開をして, この結果の線形結合をとると,

$$\begin{aligned}a_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\mathbf{p}) = \lim_{t\to\mp\infty}\frac{e^{iEt}}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3x\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\\ \times\left[\sqrt{\frac{E}{2}}\Phi(\mathbf{x},t)+i\sqrt{\frac{1}{2E}}\Pi(\mathbf{x},t)\right]\end{aligned} \tag{9.2.7}$$

を得る. 9.1 節で述べたように,「運動量」$\Pi(\mathbf{x},t)$ は ϕ を基底にした波動関数に対しては汎関数微分 $-i\delta/\delta\phi(\mathbf{x},t)$ として働くので, この基底では (9.2.4) の条件は,

$$0=\int d^3x\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\left[\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})}+E(\mathbf{p})\phi(\mathbf{x})\right]\Big\langle\phi(\mathbf{x});\mp\infty\Big|\text{VAC},\,{}^{\text{in}}_{\text{out}}\Big\rangle \tag{9.2.8}$$

となる. これと類似の微分方程式は良く知られたガウス型の解を持つので, それと同様にここでも解がガウス型であるとしてみる.

$$\langle\phi(\mathbf{x}),\mp\infty|\text{VAC},\,{}^{\text{in}}_{\text{out}}\rangle=\mathcal{N}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\int d^3x\,d^3y\,\mathcal{E}(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y})\right). \tag{9.2.9}$$

ここで, カーネル $\mathcal{E}$ と定数 $\mathcal{N}$ はこれが解となるように決める. これを (9.2.8) に代入すると, 全ての ϕ について,

$$0=\int d^3x\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\left[\int d^3y\,\mathcal{E}(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{y})-E(\mathbf{p})\phi(\mathbf{x})\right] \tag{9.2.10}$$

となっていれば, 真空の波動汎関数の汎関数微分方程式が満たされていることがわかる. これは言い換えると,

$$\int d^3x\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\mathcal{E}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = E(\mathbf{p})\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} \tag{9.2.11}$$

を意味する. この解はフーリエ逆変換で簡単に見つかって,

$$\mathcal{E}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (2\pi)^{-3}\int d^3p\, e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}E(\mathbf{p}) \tag{9.2.12}$$

である. ($E(\mathbf{p}) \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ であることを思い出だそう.) これがカーネル $\mathcal{E}$ のもっとも役立つ表式だが, $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$ のときには $\mathcal{E}$ は負次数のハンケル関数を使って書けることも述べておく.

$$\mathcal{E}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{m}{2\pi^2 r}\,\frac{d}{dr}\,\left(\frac{1}{r}\,K_{-1}(mr)\right)\ . \tag{9.2.13}$$

ここで, $r\equiv|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ だ. (9.2.9) の定数 $\mathcal{N}$ は真空状態の規格化条件を使って形式的に書き下すこともできるが, その形は計算に必要ではない.

(9.2.9) によれば, スカラー場の理論で真空期待値を計算する際には, (9.2.3) の最後の二つの因子の積は, 以下で与えられることがわかる.

$$\begin{aligned}
&\langle \text{VAC, out}|\phi(\infty);+\infty\rangle\ \langle\phi(-\infty);-\infty|\text{VAC, in}\rangle \\
&= |\mathcal{N}|^2\ \exp\left(-\tfrac{1}{2}\int d^3x\, d^3y\, \mathcal{E}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big[\phi(\mathbf{x},+\infty)\phi(\mathbf{y},+\infty)\right. \\
&\qquad\qquad \left. +\phi(\mathbf{x},-\infty)\phi(\mathbf{y},-\infty)\Big]\right) \\
&= |\mathcal{N}|^2\ \exp\left(-\tfrac{1}{2}\epsilon\int d^3x\, d^3y\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \mathcal{E}(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\tau)\phi(\mathbf{y},\tau)e^{-\epsilon|\tau|}\right).
\end{aligned} \tag{9.2.14}$$

ここで, ϵ は正の微小量だ. 最後の表式にたどり着くには, 任意の十分に滑らかな関数 $f(\tau)$ について,

$$f(+\infty)+f(-\infty) = \lim_{\epsilon\to 0+}\epsilon\int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(\tau)\, e^{-\epsilon|\tau|} \tag{9.2.15}$$

であることを使った. (9.2.14) を (9.2.3) に代入すると, 次を得る.

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle \text{VAC, out}\Big| T\Big\{\mathcal{O}_A\Big[\Pi(t_A),\Phi(t_A)\Big],\ \mathcal{O}_B\Big[\Pi(t_B),\Phi(t_B)\Big],\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\Big\}\Big|\text{VAC, in}\Big\rangle\\
&= |\mathcal{N}|^2 \int \prod_{\tau,\mathbf{x}} d\phi(\mathbf{x},\tau)\prod_{\tau,\mathbf{x}}(d\pi(\mathbf{x},\tau)/2\pi)\\
&\quad \times \mathcal{O}_A\Big[\pi(t_A),\phi(t_A)\Big]\mathcal{O}_B\Big[\pi(t_B),\phi(t_B)\Big]\cdots\\
&\quad \times \exp\Bigg[i\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\Bigg\{\int d^3x\,\dot{\phi}(\mathbf{x},\tau)\,\pi(\mathbf{x},\tau) - H\Big[\phi(\tau),\pi(\tau)\Big]\\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}i\epsilon\int d^3x d^3y \mathcal{E}(\mathbf{x},\mathbf{y})e^{-\epsilon|\tau|}\phi(\mathbf{x},\tau)\phi(\mathbf{y},\tau)\Bigg\}\Bigg]. \qquad (9.2.16)
\end{aligned}
$$

9.4 節では, (9.2.16) の指数関数の引数の最後の項は, 運動量空間でのスカラー場のプロパゲーター $[p^2+m^2-i\epsilon]^{-1}$ の分母に $-i\epsilon$ を与えるだけであることを見る. 一般的なスピンを持つ場について詳細な議論はしないが, 結果は一般的に以下となる.

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle \text{VAC, out}\Big| T\Big\{\mathcal{O}_A\Big[P_A(t_A),Q(t_A)\Big],\ \mathcal{O}_B\Big[P_B(t_B),Q(t_B)\Big],\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\Big\}\Big|\text{VAC, in}\Big\rangle\\
&= |\mathcal{N}|^2 \int \Bigg[\prod_{\tau,\mathbf{x},m} dq_m(\mathbf{x},\tau)\Bigg]\Bigg[\prod_{\tau,\mathbf{x},m}\frac{dp_m(\mathbf{x},\tau)}{2\pi}\Bigg]\\
&\quad \times \mathcal{O}_A\Big[p(t_A),q(t_A)\Big]\mathcal{O}_B\Big[p(t_B),q(t_B)\Big]\cdots\\
&\quad \times \exp\Bigg[i\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\Bigg\{\int d^3x\ \sum_m \dot{q}_m(\mathbf{x},\tau)p_m(\mathbf{x},\tau)\\
&\qquad\qquad -H\Big[q(\tau),p(\tau)\Big] + i\epsilon\ \text{項}\Bigg\}\Bigg]. \qquad (9.2.17)
\end{aligned}
$$

ここで,「$i\epsilon$ 項」は全てのプロパゲーターの分母に正しい $-i\epsilon$ を与える寄与を意味する.

(9.2.17) の中の例えば $|\mathcal{N}|^2$ のような場に依存しない定数項は重要ではない. これはそのような因子は行列要素 $\langle\text{VAC, out}|\text{VAC, in}\rangle$ に

も寄与するからだ. 時間順序積の真空期待値の連結部分 (または S 行列要素) を計算する際には, 非連結な真空の揺らぎに相当する部分は $\langle\text{VAC, out}|\text{VAC, in}\rangle$ で割ることによって取り除く. したがって, 真空期待値の中の定数因子はこの比からは消えている.

(9.2.3) に適切な「波動汎関数」を入れることによって多粒子状態の行列要素も計算することができる. これは (9.2.7) のような消滅演算子の共役演算子を真空に施して得られる. これらの波動汎関数は調和振動子のときと同じように, 真空のガウス型汎関数に場のエルミート多項式をかけてたものであることがわかる. 6.4 節で示したように S 行列要素を計算するためには (9.2.17) の真空期待値のみが必要であるから, この波動汎関数についてはこれ以上立ち入らない.

9.3 経路積分のラグランジアン形式

(9.1.38) や (9.2.17) の指数関数の被積分関数は, ハミルトニアン H に伴うラグランジアン L のように見える. ただ, 「運動量」 $p_a(t)$ や $p_n(\mathbf{x},t)$ は独立な積分変数であり, $q_a(t)$ や $q_n(\mathbf{x},t)$ とその微分には関係していないので, この見掛けの形には注意が必要だ. しかし, 非常に多くの重要な理論で, 「運動量」の積分は単に正準形式で決まる量で運動量を置き換えるのと同等であり, 結局経路積分における指数関数の被積分関数がラグランジアンになる.

それらの理論とは, ハミルトニアンが「運動量」について2次のものだ. つまり, 場の理論について書くと,

$$H[Q,P] = \tfrac{1}{2}\sum_{nm}\int d^3x\, d^3y\, A_{\mathbf{x}n,\mathbf{y}m}[Q]\; P_n(\mathbf{x})\; P_m(\mathbf{y}) + \sum_n \int d^3x\; B_{\mathbf{x}n}[Q]\; P_n(\mathbf{x}) + C[Q] \tag{9.3.1}$$

となっているものだ. ここで, 「行列」A は実対称正行列で, 特異でな

いものを意味する. (9.2.17) の指数関数の引数はこのとき p について 2 次になる.

$$\int d\tau \left\{ \int d^3x \sum_n p_n(\mathbf{x},\tau)\dot{q}_n(\mathbf{x},\tau) - H\Big[q(\tau),p(\tau)\Big] \right\}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\sum_{nm}\int d^3x\, d^3y\, d\tau\, d\tau'\, \mathcal{A}_{\tau\mathbf{x}n,\tau'\mathbf{y}m}[q]\, p_n(\mathbf{x},\tau)\, p_m(\mathbf{y},\tau')$$
$$-\sum_n \int d^3x \int d\tau\, \mathcal{B}_{\tau\mathbf{x}n}[q]\, p_n(\mathbf{x},\tau) \;-\; \mathcal{C}[q]\,. \tag{9.3.2}$$

ここで, 以下の定義を使った.

$$\mathcal{A}_{\tau\mathbf{x}n,\tau'\mathbf{y}m}[q] \equiv A_{\mathbf{x}n,\mathbf{y}m}[q(\tau)]\delta(\tau-\tau')\,, \tag{9.3.3}$$

$$\mathcal{B}_{\tau\mathbf{x}n}[q] \equiv B_{\mathbf{x}n}[q(\tau)] - \dot{q}_n(\mathbf{x},\tau)\,, \tag{9.3.4}$$

$$\mathcal{C}[q] \equiv \int d\tau\, C[q(\tau)]\,. \tag{9.3.5}$$

さて, 一般的に (9.3.2) のような 2 次形式の指数関数の積分はその引数の停留点での指数関数に比例している. 実変数 ξ_s が有限個あるとき, この表式は以下で与えられる.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_s d\xi_s\right)\exp\left\{-\tfrac{1}{2}i\sum_{sr}\mathcal{A}_{sr}\xi_s\xi_r - i\sum_s \mathcal{B}_s\xi_s - i\mathcal{C}\right\}$$
$$= \left(\mathrm{Det}\,[i\mathcal{A}/2\pi]\right)^{-1/2}\exp\left\{-i\tfrac{1}{2}\sum_{sr}\mathcal{A}_{sr}\bar{\xi}_s\bar{\xi}_r - i\sum_s \mathcal{B}_s\bar{\xi}_s - i\mathcal{C}\right\}. \tag{9.3.6}$$

ここで $\bar{\xi}$ は停留点で,

$$\bar{\xi}_s \;=\; -\sum_r (\mathcal{A}^{-1})_{sr}\mathcal{B}_r \tag{9.3.7}$$

だ. (この表式の証明はこの章の補遺に与える.) したがって, (9.2.17) の $\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B$ 等が p に依存しない限り, このようなハミルトニアンに対しては (9.2.17) の p の経路積分は, これらの変数を指数関数の引数の

2 次形式の停留点に置いたものと計算できる．この 2 次形式の汎関数微分は，

$$\frac{\delta}{\delta p_n(\mathbf{x},\tau)}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{\int d^3x\ \dot{q}_n(\mathbf{x},\tau)p_n(\mathbf{x},\tau) - H\Big[q(\tau),p(\tau)\Big] + i\epsilon\ 項\right\}$$
$$= \dot{q}_n(\mathbf{x},\tau) - \frac{\delta}{\delta p_n(\mathbf{x},\tau)}\, H\Big[q(\tau),p(\tau)\Big]$$

だ．($i\epsilon$ 項は q のみに依る．) したがって，これがゼロとなる停留「点」$\bar{p}_n(\mathbf{x},t)$ はちょうど正準形式で決まる $p_n(\mathbf{x},t)$ の値，

$$\dot{q}_n(\mathbf{x},\tau) = \left[\frac{\delta H\Big[q(\tau),p(\tau)\Big]}{\delta p_n(\mathbf{x},\tau)}\right]_{p=\bar{p}} \tag{9.3.8}$$

に等しい．$p_n(\mathbf{x},t)$ をこの値に等しくとると，(9.2.17) の指数関数の引数は通常のラグランジアン，

$$L\Big[q(\tau),\dot{q}(\tau)\Big] \equiv \int d^3x\ \left(\sum_n \dot{q}_n(\mathbf{x},\tau)\bar{p}_n(\mathbf{x},t) - H\Big[q(\tau),\bar{p}(\tau)\Big]\right) \tag{9.3.9}$$

になる．(9.2.17) は次のように書換えられる．

$$\Big\langle \mathrm{VAC, out}\Big| T\Big\{\mathcal{O}_A\Big[Q(t_A)\Big],\mathcal{O}_B\Big[Q(t_B)\Big],\cdots\Big\}\Big|\mathrm{VAC, in}\Big\rangle$$
$$= |\mathcal{N}|^2\int \prod_{\tau,\mathbf{x},n} dq_n(\mathbf{x},\tau)\left(\mathrm{Det}\Big[2i\pi\mathcal{A}[q]\Big]\right)^{-1/2}$$
$$\times\ \mathcal{O}_A\Big[q(t_A)\Big]\ \mathcal{O}_B\Big[q(t_B)\Big]\cdots$$
$$\times \exp\left[i\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{L\Big[q(\tau),\dot{q}(\tau)\Big] + i\epsilon\ 項\right\}\right]. \tag{9.3.10}$$

(p_n の積分からでる $1/2\pi$ の因子は (9.3.6) の行列式とまとめた．) これが求めていた経路積分のラグランジアン形式だ．

(9.3.10) を導くにあたって，演算子 $\mathcal{O}_A,\mathcal{O}_B,\cdots$ が正準「運動量」を含まないことが必要だった．これは見かけほど大した制限ではない．

例えば, スカラー場の理論では Φ に共役なのは $\Pi = \dot{\Phi}$ だが, $\dot{\Phi}(t)$ を含む演算子の時間順序積の行列要素を計算するには, この演算子を $\Phi(t+d\tau)$ と $\Phi(\tau)$ に置き換えたものをそれぞれ計算し, 差をとって $d\tau$ で割り, $d\tau \to 0$ とすればよい. つまり, t が (9.3.10) の演算子の他のどの時間変数とも等しくない限り (9.3.10) を単に t で微分すればよいことになる.

(9.3.10) に残っているただ一つの重要な問題は $\mathcal{A}[q]$ の行列式だ. もし $\mathcal{A}[q]$ が場に依存しなければ, これは問題とはならない. 既に, 全体に掛かる定数は真空期待値の連結部分を求めるときに, 同じ定数を持つ真空間の遷移振幅で割るので何の効果も無いことを見た. これは例えば, 幾つかのスカラー場 Φ_n が外場のカレント J_n とは微分結合をしてもしなくてもよいが, 互いには微分結合をしない場合が考えられる. このとき, ラグランジアン密度は,

$$\mathcal{L} = -\sum_n \left[\tfrac{1}{2}\partial_\lambda \Phi_n \partial^\lambda \Phi_n + {J_n}^\lambda \partial_\lambda \Phi_n\right] - V(\Phi)$$

と書ける. 7.5 節の結果をスカラー場が一つの場合から微分結合がある複数の場合に簡単に拡張すると, このラグランジアンから得られるハミルトニアンは次のようになることがわかる.

$$H = \int d^3x \sum_n \Big[\tfrac{1}{2}\Pi_n^2 + \tfrac{1}{2}(\nabla\Phi_n)^2 + \mathbf{J}_n \cdot \nabla\Phi_n + {J_n}^0 \Pi_n + \tfrac{1}{2}({J_n}^0)^2\Big] + \int d^3x\, V(\Phi)\,.$$

(Φ_n は実スカラー場とするが, 複素スカラー場も実部と虚部に分けることで扱える.) 一般的に, Π_n について線形な自明でない項があるが, 2 次の項の係数は定数であり, 単位「行列」,

$$\mathcal{A}_{xn,x'n'} = \delta^4(x - x')\,\delta_{nn'}$$

になっている. (9.3.10) の因子, $\Big(\mathrm{Det}\big[4i\pi\mathcal{A}[q]\big]\Big)^{-1/2}$ はここでは場に依存しない定数なので, 影響が無い.

しかし, 事はいつもそう単純にはすまない. 第二の例として, いわゆる非線形 σ モデルを考える. このモデルのラグランジアン密度は, 以下で与えられる.

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\sum_{nm} \partial_\lambda \Phi_n \partial^\lambda \Phi_m \Big[\delta_{nm} + U_{nm}(\Phi)\Big] - V(\Phi)\,.$$

ハミルトニアンをすなおに計算すると,

$$H = \int d^3x \Bigg[\tfrac{1}{2}\Pi_n \Big(1 + U(\Phi)\Big)^{-1}_{nm} \Pi_m + \tfrac{1}{2}\nabla\Phi_n \cdot \nabla\Phi_m \Bigg(1 + U(\Phi)\Bigg)_{nm} + V(\Phi)\Bigg]$$

となる. ここで, $\mathcal{A}$ は場に依存する量で,

$$\mathcal{A}_{nx,my} = \Big[1 + U(\Phi(x))\Big]^{-1}_{nm} \delta^4(x - y)$$

だ. このような場合, 行列式は $\mathrm{Det}\,\mathcal{A} = \exp\ \mathrm{Tr}\ln\mathcal{A}$ を使って, 有効ラグランジアンへの寄与として表わせる. 連続的な時空の位置を, 別々の非常に小さな時空の体積 Ω に囲まれた離散的な格子上の位置に置き換える. こうすると, $\mathcal{A}_{nx,my}$ のなかのデルタ関数は, $\delta^4(x-y) = \Omega^{-1}\delta_{x,y}$ と書き換えられるので,

$$(\ln\ \mathcal{A})_{nx,my} = \delta_{x,y}\Big[\ln\big(1 + U(\Phi(x))\big) - 1 \cdot \ln\ \Omega\Big]_{nm}$$

となる. ここで, 行列の対数はその冪展開で定義する. つまり,

$$\ln(1+U) = U - \frac{U^2}{2} + \frac{U^3}{3} - \cdots$$

だ. トレースを計算するには $\sum_x \cdots = \Omega^{-1}\int d^4x \cdots$ を使う. こうすると, 行列因子は,

$$\mathrm{Det}\,\mathcal{A}\ \propto\ \exp\Big[-\Omega^{-1}\int d^4x\ \mathrm{tr}\ \ln\Big[1 + U(\Phi(x))\Big]\Big]$$

となる. ここで,「tr」は通常の行列のトレースの意味だ. 比例係数 (これは $-\ln\Omega$ 項から出る) は場に依らないので, 気にしなくてよい. この行列式は有効ラグランジアン密度に以下の補正を加えるものだと理解できる.

$$\Delta\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}i\Omega^{-1}\mathrm{tr}\,\ln\Big[1+U(\Phi(x))\Big]\;.$$

因子 Ω^{-1} は紫外発散する積分,

$$\Omega^{-1} = \delta^4(x-x) = (2\pi)^{-4}\int d^4p\;\cdot\;1$$

と書ける. ここでは示さないが, この理論で $\Delta\mathcal{L}$ から出るファインマン・ダイアグラムの余分な項はスカラー場の時間微分のプロパゲーターのなかの同時刻交換関係の項を正準形式で取り入れても導くこともできる.[7] この補正を無視すると, S 行列がスカラー場の定義に誤って依存してしまい, スカラー場の変換のもとでのラグランジアンの対称性と矛盾する.

経路積分表式 (9.3.10) の因子 $(\mathrm{Det}\,\mathcal{A})^{-1/2}$ が場に依存しない場合でも, この表式のラグランジアンがもとのラグランジアンと異なることがある. 例として, 実ベクトル場の理論で次のラグランジアン密度を持つ理論を考える.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = -\sum_n \Big[&\tfrac{1}{4}\left(\partial_\mu A_{n\lambda}-\partial_\lambda A_{n\mu}\right)\left(\partial^\mu A_n{}^\lambda-\partial^\lambda A_n{}^\mu\right)\\ &+\ \tfrac{1}{2}m_n^2\,A_{n\lambda}A_n{}^\lambda + J_n{}^\lambda A_{n\lambda}\Big]\;.\end{aligned}$$

ここで, カレント $J_n{}^\mu$ は外部の c 数の量であっても, 他の場に依存してもよい. (後者の場合には, 他の場を記述するラグランジアンを加えて考えておく.) 7.5 節の結果を単純に拡張して, ハミルトニアンが, 次のように求まる.

$$H = \int d^3x \sum_n \left[\frac{1}{2}\mathbf{\Pi}_n^2 + \frac{1}{2}\left(\nabla\times\mathbf{A}_n\right)^2 + \frac{1}{2}m_n^2\mathbf{A}_n{}^2\right.$$

$$+\frac{1}{2m_n^2}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi}_n)^2+\mathbf{J}_n\cdot\mathbf{A}_n-\frac{1}{m_n^2}J_n^0\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi}_n+\frac{1}{2m_n^2}(J_n^0)^2\Bigg] .$$

ここでも, $J_n{}^\mu$ に現れる他の場の項が付け加わっているとする. ここで, 2 次項の係数は最初の例よりも多少複雑になっている.

$$\mathcal{A}_{nix,mjy}=\delta_{nm}\left[\delta_{ij}\delta^4(x-y)-\frac{1}{2m_n^2}\nabla_i\nabla_j\delta^4(x-y)\right] .$$

しかし, これは場に依存しない. したがって, 因子 $(\mathrm{Det}\,\mathcal{A})^{-1/2}$ は何の影響も無い. 一方, ラグランジアン (9.3.9) は最初に出発点としたものとは異なっている. それは $\mathbf{A}$ とその時空微分だけからなり, 時間成分 A^0 を含まない. したがって, (9.3.10) のローレンツ不変性はとても自明とは言えない.

これを救うために, 補助場を再導入する. ハミルトニアンに,

$$\Delta H=-\tfrac{1}{2}\sum_n m_n^2\int d^3x\left[A_n^0-m_n^{-2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi}_n+m_n^{-2}J_n^0\right]^2$$

という項を加え, $\mathbf{A}_n$ と $\boldsymbol{\Pi}_n$ のみならず A_n^0 についても積分する. この操作では ΔH が A^0 について 2 次で (A^0 の 2 次項の係数が場に依らず), 停留点で ΔH がゼロとなるので, 全体に場に依らない因子が掛かるだけだ. しかし, いま A_n^0 の積分の前に $\boldsymbol{\Pi}_n$ について積分すると, 経路積分 (9.2.17) のハミルトニアンは以下で置き換えられる.

$$H+\Delta H=\int d^3x\sum_n\left[\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Pi}_n^2+\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_n)^2+\tfrac{1}{2}m_n^2\mathbf{A}_n{}^2\right.$$
$$\left.-\tfrac{1}{2}m_n^2(A_n^0)^2+\mathbf{J}_n\cdot\mathbf{A}_n-J_n^0A_n^0+A_n^0\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi}_n\right] .$$

これは依然として $\boldsymbol{\Pi}_n$ について 2 次式であり, 2 次の項は (幾分単純な) 場に依らない係数を持つ. したがって, $\boldsymbol{\Pi}_n$ についての積分は $\boldsymbol{\Pi}_n$ をその汎関数 $\sum_n\int d^3x\,\boldsymbol{\Pi}\cdot\dot{\mathbf{A}}_n-H-\Delta H$ の停留点,

$$\boldsymbol{\Pi}_n=\dot{\mathbf{A}}_n+\boldsymbol{\nabla}A_n^0$$

で置き換えて得られる. このように $\mathbf{\Pi}_n$ を消去すると, $\sum_n \int d^3x\, \mathbf{\Pi}_n \cdot \dot{\mathbf{A}}_n - H - \Delta H$ は単にもとのローレンツ不変なラグランジアンになる.

A_n^0 の様な補助場を導入する必要がある場合もあるので, 今後, 正準共役量を消去した経路積分表式を正準場 q_n と補助場 c_r を含む場 ψ_ℓ を使って以下のように表わしておく.

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle \mathrm{VAC, out}\Big| T\Big\{\mathcal{O}_A\Big[\Psi_A(t_A)\Big], \mathcal{O}_B\Big[\Psi_B(t_B)\Big], \cdots\Big\}\Big|\,\mathrm{VAC, in}\Big\rangle \\
&\propto \int \prod_{\tau,\mathbf{x},n} d\psi_n(\mathbf{x},\tau)\ \mathcal{O}_A\Big[\psi(t_A)\Big]\ \mathcal{O}_B\Big[\psi(t_B)\Big]\cdots \\
&\times \exp\left[i\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{L\Big[\psi(\tau), \dot\psi(\tau)\Big] + [\,i\epsilon\ \text{項}\,]\right\}\right]\ . \qquad (9.3.11)
\end{aligned}
$$

ここで, L は場に依存する $(\mathrm{Det}\,\mathcal{A})^{-1/2}$ の寄与も必要に応じて含んだものとする.

9.4 ファインマン則の経路積分による導出

以上で, 経路積分形式を使って広い範囲の場の理論でファインマン則を導く準備ができた. ここでは, 場の演算子 (とその共役量) の時間順序積の真空期待値,

$$
M_{\ell_A \ell_B \cdots}(x_A x_B \cdots) = \frac{\langle \mathrm{VAC, out}\,| T\,\{\Psi_{\ell_A}(x_A), \Psi_{\ell_B}(x_B)\cdots\}|\,\mathrm{VAC, in}\rangle}{\langle \mathrm{VAC, out}|\mathrm{VAC, in}\rangle} \qquad (9.4.1)
$$

のみを考える. S 行列要素は (6.4 節で示したように) この期待値からそれぞれの場の外線のプロパゲーターを取り去り, 対応する自由場の生成または消滅演算子にかかる係数関数で置き換え, これらの係数関数の添字について和をとることで得られる.

ハミルトニアンが Π について 2 次の簡単な場合には, (9.3.11) より,

$$M_{\ell_A \ell_B \cdots}(x_A x_B \cdots) = \frac{\int \left[\prod_{x,\ell} d\psi_\ell(x) \right] \psi_{\ell_A}(x_A)\, \psi_{\ell_B}(x_B) \cdots e^{iI[\psi]}}{\int \prod_{x,\ell} d\psi_\ell(x)\; e^{iI[\psi]}} \tag{9.4.2}$$

だ. ここで, $I[\psi]$ は,

$$I[\psi] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ L\Big[\psi(\tau), \dot{\psi}(\tau)\Big] + i\epsilon\ \text{項} \right\} \tag{9.4.3}$$

の作用だ. L は (9.3.10) の場に依存する行列式からでる項を全て含んでいるとする.

このラグランジアンがラグランジアン密度の積分で書け, ラグランジアン密度が相互作用が無くても存在する 2 次項 $\mathcal{L}_0$ と相互作用項 $\mathcal{L}_1$ の和であるとする.

$$\begin{aligned} L\Big[\psi(\tau), \dot{\psi}(\tau)\Big] = \int d^3x\ \Big[&\mathcal{L}_0\Big(\psi(\mathbf{x},\tau),\ \partial_\mu\psi(\mathbf{x},\tau)\Big) \\ &+ \mathcal{L}_1\Big(\psi(\mathbf{x},\tau),\ \partial_\mu\psi(\mathbf{x},\tau)\Big)\Big]\ . \end{aligned} \tag{9.4.4}$$

このとき, (9.4.3) の作用は以下のようになる.

$$I[\psi] = I_0[\psi] + I_1[\psi], \tag{9.4.5}$$

$$I_0[\psi] = \int d^4x\ \mathcal{L}_0\Big(\psi(x), \partial_\mu\psi(x)\Big) + i\epsilon\ \text{項}, \tag{9.4.6}$$

$$I_1[\psi] = \int d^4x\ \mathcal{L}_1\Big(\psi(x), \partial_\mu\psi(x)\Big)\ . \tag{9.4.7}$$

$\mathcal{L}_0$ と「$i\epsilon$ 項」は場について 2 次なので, I_0 は常に以下の一般的な 2 次形式で書ける.

$$I_0[\psi] = -\tfrac{1}{2} \int d^4x\ d^4x' \sum_{\ell,\ell'} \mathcal{D}_{\ell x,\ell' x'}\ \psi_\ell(x)\ \psi_{\ell'}(x')\ . \tag{9.4.8}$$

例えば, 質量が m の実スカラー場については, 自由ラグランジアンは,

$$\mathcal{L}_0 = -\tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{9.4.9}$$

であり, I_0 の $i\epsilon$ 項は (9.2.16) より以下で与えられる.

$$\tfrac{1}{2}i\epsilon\int dt\int d^3x\,d^3x'\;\mathcal{E}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\;\phi(\mathbf{x},t)\phi(\mathbf{x}',t)\;. \tag{9.4.10}$$

したがって,

$$\mathcal{D}_{x,x'}=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\,\delta^4(x-x')+m^2\,\delta^4(x-x')-i\epsilon\mathcal{E}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\delta(t-t') \tag{9.4.11}$$

となる. (ここで, $i\epsilon$ 項の $e^{-\epsilon|\tau|}$ は ϵ の高次補正しか与えないので落とした.) 相互作用を扱うために, 指数関数を I_1 の冪で展開する.

$$\exp(iI[\psi])=\exp(iI_0[\psi])\sum_{N=0}^{\infty}\frac{i^N}{N!}\Big(I_1[\psi]\Big)^N\;. \tag{9.4.12}$$

そして, I_1 を場の冪で展開する. (9.4.2) の分子, 分母にある積分は一般的に以下の形をしている.

$$\mathcal{I}_{\ell_1\ell_2\cdots}(x_1x_2\cdots)\equiv\int\left(\prod_{\ell,x}d\psi_\ell(x)\right)\;e^{iI_0[\psi]}\;\psi_{\ell_1}(x_1)\;\psi_{\ell_2}(x_2)\cdots\;. \tag{9.4.13}$$

ここで, 場の因子 $\psi_{\ell_1}(x_1),\psi_{\ell_2}(x_2)$ 等は $I_1[\psi]$ やもともと (9.4.2) の分子にある場 $\psi_{\ell_A}(x_A)$ 等から来る. $I_0[\psi]$ が (9.4.8) の形のときには (9.4.13) の積分はこの章の補遺で計算する積分で離散的添字 s を添字の対 ℓ,x に置き換えたものと同じ形をしている. したがって, (9.A.12) と (9.A.15) を使えて, 以下を得る.

$$\mathcal{I}_{\ell_1\ell_2\cdots}(x_1x_2\cdots)=\left[\mathrm{Det}\left(\frac{i\mathcal{D}}{2\pi}\right)\right]^{-1/2}$$
$$\times\sum_{\substack{\text{pairings of}\\ \text{fields}}}\;\prod_{\text{pairs}}\Big[-i\mathcal{D}^{-1}\Big]_{\text{paired fields}}\;. \tag{9.4.14}$$

これは (9.4.2) の分子を計算するための座標空間での共変的なファインマン則となっている. つまり, 方法としては, 相互作用 I_1 について

展開し, I_1 の中の場同士や, それと $\psi_{\ell_A}(x_A)$ 等の場の対 (pair) をとって, $I_1[\psi]$ の場の係数と「プロパゲーター」 $-i\Delta$,

$$\Delta_{\ell_1\ell_2}(x_1,x_2)=(\mathcal{D}^{-1})_{\ell_1x_1,\ell_2x_2} \tag{9.4.15}$$

の積の時空積分を計算する. 全体はこのような対の取り方 (pairing) についての和で与えられる. ((9.4.14) の因子 $[\mathrm{Det}(i\mathcal{D}/2\pi)]^{-1/2}$ はどの線にもつながっていない 1 つづつのループを個数について無限まで足しあわせたものに相当している. いずれにせよ, これは (9.4.2) の比では打消し合う.)

プロパゲーター (9.4.15) の計算を行う. (9.4.15) は積分方程式,

$$\sum_{\ell_2}\int d^4x_2\, \mathcal{D}_{\ell_1x_1,\ell_2x_2}\Delta_{\ell_2\ell_3}(x_2,x_3)=\delta^4(x_1-x_3)\delta_{\ell_1\ell_3} \tag{9.4.16}$$

として解釈できる. 外場が無いとき, 並進対称性より $\mathcal{D}$ は x_1-x_2 のみの関数であり, フーリエ積分,

$$\mathcal{D}_{\ell_1x_1,\ell_2x_2}\equiv(2\pi)^{-4}\int d^4p\; e^{ip\cdot(x_1-x_2)}\,\mathcal{D}_{\ell_1\ell_2}(p) \tag{9.4.17}$$

で書ける. したがって, (9.4.16) の解は, $\mathcal{D}^{-1}$ を行列 $\mathcal{D}$ の通常の逆行列として,

$$\Delta_{\ell_1\ell_2}(x_2,x_3)=(2\pi)^{-4}\int d^4p\; e^{ip\cdot(x_1-x_2)}\,\mathcal{D}^{-1}_{\ell_1\ell_2}(p) \tag{9.4.18}$$

となる. 後で見るように, $i\epsilon$ 項はこの逆行列を p の全ての実の値について定義する効果がある. こうして, プロパゲーターの計算は, 有限次元の行列の逆の計算に帰着した.

まず最初に, 質量のあるスカラー場を考える. このとき, カーネル $\mathcal{D}$ は (9.4.11) の形をとる. これは以下のフーリエ積分で書ける.

$$\mathcal{D}_{x,y}=(2\pi)^{-4}\int d^4p\; e^{ip\cdot(x-y)}\Big(p^2+m^2-i\epsilon\, E(\mathbf{p})\Big)\,.$$

そうするとプロパゲーターは,

$$\Delta(x,y)=(2\pi)^{-4}\int d^4p\; e^{ip\cdot(x-y)}\left(p^2+m^2-i\epsilon E(\mathbf{p})\right)^{-1}$$

となる. これは以前に演算子法で求めたスカラー場のプロパゲーターと同じだ. (ϵ と $\epsilon E(\mathbf{p})$ は両方とも正の微小量なので差が無い.)

第二の例として, 質量を持つ実のベクトル場を考える. 自由ラグランジアンは,

$$\mathcal{L}_0=-\tfrac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)-\tfrac{1}{2}m^2\;A_\mu A^\mu$$

だ. ここで, 前と同様に $I_0[\psi]$ を (9.4.8) の形に書くと, カーネルは,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\rho x,\sigma y}&=\left[\eta_{\rho\sigma}\,\frac{\partial^2}{\partial x^\mu\partial y_\mu}-\frac{\partial^2}{\partial x^\sigma\partial y^\rho}+m^2\eta_{\rho\sigma}\right]\delta^4(x-y)+i\epsilon\text{ 項}\\&=(2\pi)^{-4}\int d^4p\;e^{ip\cdot(x-y)}\left[\eta_{\rho\sigma}p^2-p_\rho p_\sigma+m^2\eta_{\rho\sigma}+i\epsilon\text{ 項}\right]\end{aligned}$$

となる. ここで証明は略すが, この「$+\,i\epsilon$ 項」は簡単な形 $-i\epsilon\,E(\mathbf{p})\eta_{\rho\sigma}$ になっている. したがって, ベクトル場のプロパゲーターは単に, 積分の中の 4×4 行列の逆をとることによって得られて,

$$\Delta_{\rho\sigma}(x,y)=(2\pi)^{-4}\int\frac{d^4p\;e^{ip\cdot(x-y)}}{p^2+m^2\;-i\epsilon\,E(\mathbf{p})}\left[\eta_{\rho\sigma}+\frac{p_\rho p_\sigma}{m^2}\right]$$

となる. (分子では ϵ に比例する項は落とした. このような項は分母では被積分関数が質量殻上, $p^2=-m^2$ でどう振舞うかを決めるので重要だ.) これは $\delta(x^0-y^0)$ に比例する非共変項を除いては演算子法で導いたプロパゲーターと同じだ. これらの非共変項は以前は相互作用ハミルトニアンの非共変項を打消すために必要だったが, いまは共変的なラグランジアンから直接にファインマン則の頂点を導いていて, そのような打消しは必要ない.

微分結合のある理論も同様に簡単だ. 場の微分 $\partial_\mu\psi_\ell(x)$ と他の場 $\psi_m(y)$ (これ自身も場の微分でもよい) を対にしたときに現れる因子

は, 以下で与えられる.

$$\langle \partial_\mu \psi_\ell(x)\, \psi_m(y) \rangle = \frac{\int \left[\prod_{x,\ell} d\psi_\ell(x) \right] \partial_\mu \psi_\ell(x)\, \psi_m(y)\, e^{iI[\psi]}}{\int \left[\prod_{x,\ell} d\psi_\ell(x) \right] e^{iI[\psi]}}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle \psi_\ell(x)\, \psi_m(y) \rangle \, . \tag{9.4.19}$$

このようなプロパゲーターは非共変的な部分を持たない. 例えば, 実のスカラー場については $\partial_\mu \phi$ と $\partial_\nu \phi$ を対にすると, 運動量空間のプロパゲーター $k_\mu k_\nu / (k^2 + m^2 - i\epsilon)$ が得られる. また, 前の節で見たように, スカラー場が他の場と微分結合する理論での頂点はラグランジアンから読み取れて, それ自身共変的になっている.

9.5 フェルミオンの経路積分

ここで, 経路積分をボソンのみならずフェルミオンも含む理論に拡張する問題を考える. これには, 「正しい」ファインマン則が出さえすればよいとして, ボソンのときと同じように純粋に形式的な道筋をたどることは簡単だ. しかし, ここではそうせずにボソンと同様に, 量子力学の原理から直接にフェルミオンの経路積分を導く.[9]

前と同様に, 「座標」 Q_a と正準共役な「運動量」 P_a を持つ一般的な量子力学系を考える. しかし, これらは交換関係の代わりに反交換関係を満たすとする.

$$\left\{ Q_a, P_b \right\} = i\, \delta_{ab} \, , \tag{9.5.1}$$

$$\left\{ Q_a, Q_b \right\} = \left\{ P_a, P_b \right\} = 0 \, . \tag{9.5.2}$$

(これらは全てシュレーディンガー表示の演算子である. 言い換えると, ハイゼンベルグ表示の演算子で時刻 $t = 0$ のものだ.) あとで, 離散的な添字 a を空間での位置 $\mathbf{x}$ と場の添字 m に置き換える.

最初に Q と P が働く状態の完全基底を構成しよう．どの与えられた a に対しても，

$$Q_a^2 = P_a^2 = 0 \tag{9.5.3}$$

が成立する．したがって，常に全ての Q_a で消される「ケット」状態 $|0\rangle$ が存在する．

$$Q_a|0\rangle = 0\,. \tag{9.5.4}$$

また，全ての P_a で (右から) 消される「ブラ」状態 $\langle 0|$ もある．

$$\langle 0|\, P_a = 0\,. \tag{9.5.5}$$

例えば，

$$|0\rangle \propto \left(\prod_a Q_a\right)|f\rangle\,, \qquad \langle 0| \propto \langle g|\left(\prod_a P_a\right)$$

とすればよい．ここで，$|f\rangle$ と $\langle g|$ はこれらが恒等的にゼロでないどんなケットとブラでもよい．(これらは全ての $|f\rangle$ と $\langle g|$ について消えることはない．なぜならここでは演算子 $\prod_a Q_a$ と $\prod_a P_a$ は恒等的にはゼロではないとしているからだ.) これらの状態は (9.5.3) により，(9.5.4) と (9.5.5) を満たす．一般的にはボソン的な自由度の分だけ $|0\rangle$ と $\langle 0|$ には任意性があるが，ここでは簡単のために自由度としてはフェルミオン的演算子 Q_a と P_a のみを考え，(9.5.4) と (9.5.5) を満たす状態は定数因子を除いて一つしかないする．この定数因子は状態が，

$$\langle 0|0\rangle = 1 \tag{9.5.6}$$

を満たすように選んでおく．(もし $\langle 0|$ を Q_a の固有値ゼロの左固有状態としたらこの規格化を要求できない．その場合には $\langle 0|\{Q_a, P_b\}|0\rangle$ が消えて，これは (9.5.1) によれば $\langle 0|0\rangle = 0$ を意味する.)

7.5 節で見たように，ディラック理論では Q_a はエルミートではない．その代わりに，共役量は $-iP_a$ になっていて，$\langle 0|$ は $|0\rangle$ の単なる共役

と見なすことが可能だ．しかし，フェルミオン的演算子によっては (たとえば，3 巻で導入する「ゴースト」場がそうだが) P_a が Q_a の共役とは無関係になる．以下では Q_a や P_a の共役性については何も仮定せず，$|0\rangle$ と $\langle 0|$ の間には何の関係もないとする．

この系の完全系は $|0\rangle$ と ($a, b, \cdots$ について反対称な) 以下の状態で張られる．

$$|\,a, b, \cdots\rangle \equiv P_a P_b \cdots |0\rangle\,. \tag{9.5.7}$$

ここで $|0\rangle$ に掛かる P は任意の異なるものからなっている．これらが完全系を張るということは，これらの状態に P と Q のどんな演算子関数をかけたものも，これらの状態の集合の線形結合で表せることを意味する．特に，もし添字 a が $|\,b, c, \cdots\rangle$ の添字のどれとも等しくなければ，

$$Q_a|\,b, c, \cdots\rangle = 0\,, \tag{9.5.8}$$

$$P_a|\,b, c, \cdots\rangle = |\,a, b, c\cdots\rangle \tag{9.5.9}$$

となる．一方，もし a が $b, c, \cdots$ のどれかと等しければ，状態を書き換えて，(必要ならその符号を変えて) a をそれらの添字の最初に置き，

$$Q_a|\,a, b, c, \cdots\rangle = i\,|\,b, c\cdots\rangle\,, \tag{9.5.10}$$

$$P_a|\,a, b, c, \cdots\rangle = 0 \tag{9.5.11}$$

となる．

同様にして，$\langle 0|$ と以下の (添字について反対称な) 状態とで完全な双対基底を作ることができる．

$$\langle a, b, \cdots\,| \equiv \langle 0|\cdots(-iQ_b)(-iQ_a)\,. \tag{9.5.12}$$

(9.5.4)–(9.5.6) と反交換関係 (9.5.1) とから，これらの状態のスカラー積は以下の値となることがわかる．

$$\langle c, d, \cdots\,|\,a, b, \cdots\rangle = \langle 0|\cdots(-iQ_d)(-iQ_c)\,P_a P_b\cdots|0\rangle$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \{c, d, \cdots\} \neq \{a, b, \cdots\} \\ 1 & \text{if} \quad c = a,\ d = b,\ \text{etc.} \end{cases} \tag{9.5.13}$$

ここで $\{\cdots\}$ はブラケットのなかの添字の順序付けされていない集合を意味する.

ファインマン則を導くには, (9.5.7) のような中間状態についての和を Q_a か P_a の固有状態についての積分と書き換える必要がある. しかし, これらの演算子は通常の意味での (ゼロ以外の) 固有値を持てない. (全ての a について) 以下を満たす状態 $|q\rangle$ があったとしよう.

$$Q_a|q\rangle = q_a|q\rangle\ . \tag{9.5.14}$$

(9.5.2) から,

$$q_a q_b + q_b q_a = 0 \tag{9.5.15}$$

となるが, 通常の数はこれを満たすことができない. しかし, 物理的ヒルベルト空間に関する限り c 数のように働くが, 反交換関係 (9.5.15) を満たす「変数」(**グラスマン変数** (Grassmann variable) と呼ばれる) q_a を導入しても何ら問題は生じない. 更に, 以下の関係を要請する.

$$\{q_a,\, q'_b\} = \{q_a,\, Q_b\} = \{q_a,\, P_b\} = 0. \tag{9.5.16}$$

ここで, q と q' はこれらの変数の二つの「値」を意味する. こうすると, (9.5.14) を満たす固有状態 $|q\rangle$ を構成できる.

$$|q\rangle = \exp\left(-i\sum_a P_a q_a\right)|0\rangle\ . \tag{9.5.17}$$

ここで, 指数関数は通常の冪展開で定義する. ((9.5.14) を確認するには, 全ての $P_a q_a$ が互いに可換で二乗がゼロであり,

$$[Q_a - q_a]\,|q\rangle = [Q_a - q_a]\ \exp(-iP_a q_a)\ \exp\left(-i\sum_{b\neq a} P_b q_b\right)|0\rangle$$

$$= [Q_a - q_a]\,[1 - iP_aq_a]\ \exp\left(-i\sum_{b\neq a}P_bq_b\right)|0\rangle$$

$$= [-i\{Q_a, P_a\}q_a - q_a]\ \exp\left(-i\sum_{b\neq a}P_bq_b\right)|0\rangle = 0$$

となることを見ればよい.) また, 左固有状態 $\langle q|$($|q\rangle$ の共役ではない)を,

$$\langle q| \equiv \langle 0|\left(\prod_a Q_a\right)\ \exp\left(-i\sum_a q_aP_a\right) =$$

$$\langle 0|\left(\prod_a Q_a\right)\ \exp\left(+i\sum_a P_aq_a\right) \quad (9.5.18)$$

と定義できる. ここで, $\prod_a$ はどれでもいいから基準と決めた順序での積とする. (9.5.14) の議論と同じようにして,

$$\langle q|\,Q_a \;=\; \langle q|q_a \quad (9.5.19)$$

が示せる. これらの固有状態のスカラー積は,

$$\langle q'|q\rangle = \langle 0|\left(\prod_a Q_a\right)\ \exp\left(i\sum_b P_b(q'_b - q_b)\right)|0\rangle$$

$$= \langle 0|\left(\prod_a Q_a\right)\left(\prod_b(1 + iP_b(q'_b - q_b))\right)|0\rangle$$

となる. Q_a を(一番右のものから始めて)全て右に動かすと, $i^2(q'_a - q_a)$ の因子がでる. これはスカラー積の右外に動かすと,

$$\langle q'|q\rangle = \prod_a(q_a - q'_a) \quad (9.5.20)$$

となる. (9.5.20) が q の積分でデルタ関数の役割をすることを後でみる.

同じようにして, P_a の右固有状態と左固有状態を作れる.

$$P_a|p\rangle = p_a|p\rangle\ , \tag{9.5.21}$$

$$\langle p|\,P_a = \langle p|p_a\ . \tag{9.5.22}$$

ここで, p_a は q_a と同じく反可換 c 数だ. (便利のためにこれは, q_a および全てのフェルミオン的演算子と, また互いにも反可換であるとする.) そして,

$$|p\rangle = \exp\left(-i\sum_a Q_a p_a\right)\left(\prod_b P_b\right)|0\rangle\ , \tag{9.5.23}$$

$$\langle p| = \langle 0|\ \exp\left(-i\sum_a p_a Q_a\right) \tag{9.5.24}$$

であり, 内積は (P を左に動かして),

$$\langle p'|p\rangle = \prod_a (p'_a - p_a) \tag{9.5.25}$$

となる. これらの二種類の固有状態の互いのスカラー積は, 以下で与えられる.

$$\begin{aligned}\langle q|p\rangle &= \langle q|\exp\left(-i\sum_a Q_a p_a\right)\left(\prod_a P_a\right)|0\rangle \\ &= \left(\prod_a \exp(-iq_a p_a)\right)\langle q|\left(\prod_a P_a\right)|0\rangle \\ &= \left(\prod_a \exp(-iq_a p_a)\right)\langle 0|\left(\prod_a Q_a\right)\left(\prod_a P_a\right)|0\rangle\ .\end{aligned}$$

したがって,

$$\langle q|p\rangle = \chi_N \exp\Big(-i\sum_a q_a p_a\Big) = \chi_N \exp\Big(i\sum_a p_a q_a\Big) \tag{9.5.26}$$

となる. ここで χ_N は Q_a 演算子の個数 N にのみよる位相であり,

$$\chi_N \equiv \langle 0|\left(\prod_a Q_a\right)\left(\prod_a P_a\right)|0\rangle = i^N(-1)^{N(N-1)/2}$$

で定義される. また, 以下はもう少し簡単に求められる.

$$\langle p|q\rangle = \prod_a \exp(-ip_a q_a)\,. \tag{9.5.27}$$

$|q\rangle$ の状態が (また $|p\rangle$ も) ある意味で完全系をなすことは簡単にわかる. (9.5.17) の定義より, $|a,b,\cdots\rangle$ の状態は一般的な基底で, (位相を除いて) 単に $|q\rangle$ を q の積で展開したときの $q_a q_b\cdots$ の係数だ. したがってどんな状態 $|f\rangle$ も以下の形で書ける.

$$|f\rangle = f_0|q\rangle_0 + \sum_a f_a|q\rangle_a + \sum_{a\neq b} f_{ab}|q\rangle_{ab} + \cdots\,.$$

ここで f は数係数であり, $|q\rangle$ の下添字 $a,b,\cdots$ は $|q\rangle$ の中の $q_a q_b\cdots$ の係数を意味する.

状態について足すには, フェルミオン的変数についての一種の積分を導入すると非常に便利だ. これは**ブレザン積分** (Berezin integration)[10] として知られていて, 反可換 c 数の積の係数を取り出すように作られている. そのような変数 ξ_n (p でも q でもそれらが一緒でもよい) のどんな集合に対しても最も一般的な関数 $f(\xi)$ (c 数でも $|q\rangle$ のような状態ベクトルでもよい) は,

$$f(\xi) = \left(\prod_n \xi_n\right) c \;+\; [\xi \text{ 因子をより少なく含む項}] \tag{9.5.28}$$

という形に書ける. そして, ξ の積分は単純に,

$$\int \left(\widetilde{\prod_n} d\xi_n\right) f(\xi) \equiv c \tag{9.5.29}$$

と定義できる. ここで, (9.5.29) のチルダー (˜) は微分が (9.5.28) の積分変数の逆順に書かれているという便利な約束を意味する. この積はどの二つの ξ の置換のもとでも反対称なので, 積分は同様にどの二つの $d\xi$ の置換のもとでも反対称だ. したがって, これらの「微分」は

実際上反可換だ.

$$d\xi_n d\xi_m + d\xi_m d\xi_n = 0\,. \tag{9.5.30}$$

また, 係数 c はそれ自身, 積分する変数 ξ とは反可換な他の積分されない c 数の変数に依存してもよい. この場合には, (9.5.28) で行ったように, c の定義を標準化するために積分の前に全ての ξ を c の左に動かしておくことにする.

たとえば, 反可換 c 数, ξ_1 と ξ_2 の対の最も一般的な関数は次の形をとる.

$$f(\xi_1,\xi_2) = \xi_1\xi_2\, c_{12} + \xi_1\, c_1 + \xi_2\, c_2 + d\,.$$

これは ξ_1 と ξ_2 の二乗とそれより高次の冪は消えるからだ. この関数の積分は,

$$\int d\xi_1\; f(\xi_1,\xi_2) = \xi_2\, c_{12} \;+\; c_1\;, \quad \int d\xi_2\; f(\xi_1,\xi_2) = -\xi_1\, c_{12} \;+\; c_2\;,$$

$$\int d\xi_2\; d\xi_1\; f(\xi_1,\xi_2) = c_{12}$$

となる. 多重積分は一重積分の繰り返しと同等だ.

$$\int d\xi_2\; d\xi_1\; f(\xi_1,\xi_2) = \int d\xi_2 \Big[\int d\xi_1\; f(\xi_1,\xi_2)\Big]\,.$$

この結果はフェルミオン的変数がいくつもある積分に簡単に拡張できる. (この結果で余分な符号因子が出ないように, (9.5.29) の微分要素を (9.5.28) の変数の積の逆順にとった.) 実際, 積分を単一の反可換 c 数 ξ_1 について定義し, 多重積分は通常のように単一積分の繰り返しとして定義することもできた. 最も一般的な反可換 c 数の関数は ($\xi_1^2 = 0$ により), どの一つの変数についても線形だ.

$$f(\xi_1,\xi_2,\cdots) = b(\xi_2\cdots) + \xi_1 c(\xi_2\cdots)\,.$$

また, その ξ_1 積分は以下で定義される.

$$\int d\xi_1 f(\xi_1,\xi_2,\cdots) = c(\xi_2,\cdots)\,.$$

この過程を繰り返すと, (9.5.28) と (9.5.29) と同じ多重積分が得られる.

この積分の定義は通常の実変数についての ($-\infty$ から $+\infty$ までの) 積分と同じ性質を他にも幾つか持っている. しかし, 重要な違いもある.

明らかにブレザン積分は線形だ. これは,

$$\int\left(\tilde{\prod_n} d\xi_n\right)\Big[f(\xi)+g(\xi)\Big]=\int\left(\tilde{\prod_n} d\xi_n\right)f(\xi)+\int\left(\tilde{\prod_n} d\xi_n\right)g(\xi) \tag{9.5.31}$$

と,

$$\int\left(\tilde{\prod_n} d\xi_n\right)\Big[f(\xi)a(\xi')\Big]=\left[\int\left(\tilde{\prod_n} d\xi_n\right)f(\xi)\right]a(\xi') \tag{9.5.32}$$

が成り立つことによる. ここで $a(\xi')$ は積分しない反可換 c 数 ξ'_m の任意の関数 (定数でもよい) だ. しかし, 左積についての線形性はそう自明ではない. ν 個の変数について積分しているなら, ξ'_m は全ての ξ_n と反可換であると仮定しているので,

$$a\Big((-)^\nu\xi'\Big)\left(\prod_n\xi_n\right)=\left(\prod_n\xi_n\right)a(\xi')$$

であり, また,

$$\int\left(\prod_n d\xi_n\right)\Big[a\Big((-)^\nu\xi'\Big)f(\xi)\Big]=a(\xi')\int\left(\prod_n d\xi_n\right)f(\xi) \tag{9.5.33}$$

となる. したがって, 微分 $d\xi_n$ を全ての (ξ_n を含む) 反可換変数と反可換であるとすると非常に便利だ (しかし, 必ずしも必要ではない).

$$(d\xi_n)\xi'_m+\xi'_m(d\xi_n)=0\,. \tag{9.5.34}$$

この場合 (9.5.33) はもっと簡単に次のようになる.

$$\int a(\xi')\left(\prod_n d\xi_n\right)f(\xi)=a(\xi')\int\left(\prod_n d\xi_n\right)f(\xi)\,. \tag{9.5.35}$$

もう一つ, 通常の積分と似ている点は, ξ に独立な任意の反可換 c 数 ξ' について,

$$\int \left(\prod_n d\xi_n\right) f(\xi+\xi') = \int \left(\prod_n d\xi_n\right) f(\xi) \tag{9.5.36}$$

が成立することだ. これは ξ を定数分ずらしても, それは f の項の内, 全ての ξ 変数の積になっていない項にのみ影響するからだ.

一方, 以下の変数変換を考える.

$$\xi_n \to \xi'_n = \sum_m \mathcal{S}_{nm}\xi_m \,. \tag{9.5.37}$$

ここで $\mathcal{S}$ は任意の特異ではない通常の数の行列だ. 新しい変数の積は,

$$\prod_n \xi'_n = \sum_{m_1 m_2 \cdots} \left(\prod_n \mathcal{S}_{nm_n}\xi_{m_n}\right)$$

となる. しかし, $\prod_n \xi_{m_n}$ は単に (元の順序の積) $\prod_n \xi_n$ に置換 $n \to m_n$ が偶置換か奇置換かによって $+1$ か -1 となる符号因子 $\epsilon[m]$ をかけたものだ.

$$\prod_n \xi'_n = \left[\sum_{m_1 m_2 \cdots} \left(\prod_n \mathcal{S}_{nm_n}\right)\epsilon[m]\right] \prod_n \xi_n = (\mathrm{Det}\,\mathcal{S}) \prod_n \xi_n \,.$$

これは ξ_n をどんな順序にしても ξ'_n を同じ順序にするかぎり成立する. これより, 任意の関数 $f(\xi)$ の中の $\prod_n \xi'_n$ の係数は単に $(\mathrm{Det}\mathcal{S})^{-1}$ かける $\prod_n \xi_n$ の係数であり,

$$\int \left(\tilde{\prod_n} d\xi'_n\right) f = (\mathrm{Det}\,\mathcal{S})^{-1} \int \left(\tilde{\prod_n} d\xi_n\right) f \tag{9.5.38}$$

となる. これは $(\mathrm{Det}\,\mathcal{S})$ の冪が $+1$ ではなく -1 であることを除けば, 通常の変数変換の法則だ. 後で, フェルミオンのある理論でファインマン則を導くときにあらわれる積分を計算するのに (9.5.38) と線形性 (9.5.31), (9.5.32) と (9.5.35) を使う.

この積分の定義を使うと, 完全性条件を固有値の積分として書ける. 既に述べたように, どんな状態 $|f\rangle$ も $|0\rangle$, $|a\rangle$, $|a,b\rangle$ 等の級数として展開できる. これらの状態は (位相因子を除けば) Q の固有状態に含まれる積 1, q_a, $q_a q_b$ 等の係数だ. 積分の定義によれば, 状態 $|q\rangle$ の中のどんな積 $q_b q_c q_d \cdots$ の係数も, $|q\rangle$ と a が $b, c, d, \cdots$ のどれにも等しくない全ての q_a との積を積分して得られる. したがって, 関数 $f(q)$ をそのような q の積の和と適切に定義すれば, どんな状態 $|f\rangle$ も積分,

$$|f\rangle = \int \left(\tilde{\prod_a} dq_a\right) |q\rangle f(q) = \int |q\rangle \left(\tilde{\prod_a} dq_a\right) f(q) \tag{9.5.39}$$

として書ける. ($|q\rangle$ を定義するのに使った (9.5.17) の指数関数はフェルミオン的な量を偶数個しか含まないので, $|q\rangle$ は余分な符号を出さずに微分の左に動かせる.) 与えられた状態ベクトル $|f\rangle$ に対して関数 $f(q)$ を見つけるには, (9.5.39) とブラ $\langle q'|$ の内積をとる (q' は Q の固有値だ). (9.5.35) と (9.5.20) にしたがえば, これは,

$$\langle q'|f\rangle = \int \left(\prod_a (q_a - q'_a)\right) \left(\tilde{\prod_b} dq_b\right) f(q)$$

となる. どの因子 $(q_a - q'_a)$ も全ての微分 dq_b の右に動かすと, q_a 変数の全個数を N として, 符号因子 $(-)^{N^2} = (-)^N$ がでる. したがって,

$$\langle q'|f\rangle = (-)^N \int \left(\tilde{\prod_b} dq_b\right) \left(\prod_a (q_a - q'_a)\right) f(q)$$

だ. $f(q)$ を $f(q'+(q-q'))$ と書き換え, $q-q'$ の冪で展開する. $\prod(q_a - q'_a)$ をかけると最低次の項以外は全て消えるので,

$$\left(\prod_a (q_a - q'_a)\right) f(q) = \left(\prod_a (q_a - q'_a)\right) f(q') \tag{9.5.40}$$

となる. (9.5.20) が q 積分でのデルタ関数の役割をすると前に述べたが, 上記のことはこれが正しいことを部分的に示している. (9.5.32) を

使うと,

$$\langle q'|f\rangle = (-)^N \left[\int \left(\tilde{\prod_b} dq_b\right)\left(\prod_a (q_a - q'_a)\right) f(q')\right]$$

を得る. 被積分関数の $\prod q_a$ に比例する項は, 係数 $f(q')$ を持っているので, 積分の定義により, $\langle q'|f\rangle = (-)^N f(q')$ だ. これを (9.5.39) に入れもどすと, 以下の完全性の関係式が得られる.

$$|f\rangle = (-)^N \int |q\rangle \left(\tilde{\prod_b} dq_b\right) \langle q|f\rangle \, .$$

これは演算子で書けば,

$$1 = \int |q\rangle \left(\tilde{\prod_a} -dq_a\right) \langle q| \tag{9.5.41}$$

となる. 全く同じ方法で, 以下の式も示せる.

$$1 = \int |p\rangle \left(\tilde{\prod_a} dp_a\right) \langle p| \, . \tag{9.5.42}$$

これで遷移行列要素を計算する準備ができた. 前と同様に時刻に依存する演算子,

$$Q_a(t) \equiv \exp(iHt)\, Q_a \, \exp(-iHt) \, , \tag{9.5.43}$$

$$P_a(t) \equiv \exp(iHt)\, P_a \, \exp(-iHt) \tag{9.5.44}$$

とそれらの右固有状態と左固有状態,

$$|q;t\rangle \equiv \exp(iHt)|q\rangle \, , \qquad |p;t\rangle \equiv \exp(iHt)|p\rangle \, , \tag{9.5.45}$$

$$\langle q;t| \equiv \langle q|\exp(-iHt) \, , \qquad \langle p;t| \equiv \langle p|\exp(-iHt) \tag{9.5.46}$$

を定義する. 微小時間離れた q の固有状態の間の内積は,

$$\langle q';\tau + d\tau|q;\tau\rangle = \langle q'|\exp(-iHd\tau)|q\rangle$$

だ. さて, (9.5.42) を演算子 $\exp(-iHd\tau)$ の左に挿入する. ハミルトニアン演算子 $H(P,Q)$ を全ての P が全ての Q の左にあるように定義する. そうすると ($d\tau$ を微小として),

$$\langle p|\exp\Big(-iH(P,Q)d\tau\Big)|q\rangle = \langle p|q\rangle\exp\Big(-iH(p,q)d\tau\Big)$$

となる. (c 数 $H(p,q)$ は符号を変えることなく行列要素のどちら側にも動かせる. これはハミルトニアンのどの項もフェルミオン的演算子を偶数個含むと仮定するからだ.) これにより,

$$\begin{aligned}\langle q';\tau+d\tau|q;\tau\rangle &= \int\langle q'|p\rangle\left(\tilde{\prod_a}dp_a\right)\langle p|\exp(-iHd\tau)|q\rangle\\ &= \int\langle q'|p\rangle\left(\tilde{\prod_a}dp_a\right)\langle p|q\rangle\exp\Big(-iH(p,q)d\tau\Big)\end{aligned}$$

となる. (9.5.26) と (9.5.27) を使って, 積 p_aq_a と $p_aq'_a$ が全ての反可換 c 数と可換であることを考慮すると, 以下がわかる.

$$\langle q';\tau+d\tau|q;\tau\rangle = \int\left(\tilde{\prod_a}i\ dp_a\right)\exp\left[i\sum_a p_a(q'_a-q_a)-iH(p,q)d\tau\right]. \tag{9.5.47}$$

残りの導出は 9.1 節と同じ道をたどる. 演算子積の行列要素 $\langle q';t'|Q_A(P(t_A))\,Q_B(P(t_B),Q(t_B))\cdots|q;t\rangle$ ($t'>t_A>t_B>\cdots>t$ とする) を計算するには, t から t' までの時間間隔を多くの非常に短い時間間隔に分ける. それぞれの時間間隔で完全性条件 (9.5.41) を挿入して, (9.5.47) を使ってその行列要素を計算する ($\mathcal{O}_A,\mathcal{O}_B$, 等は適切な場所に入れておく). 全ての微分を左に動かし (それぞれの段階で dp と dq は同じ個数あるので, これで符号は変化しない), それぞれの時刻の q_a と p_a の間を内挿する関数 $q_a(t)$ と $p_a(t)$ を導入する. こうして, 以下を得る.

$$\langle q';t'|T\left\{\mathcal{O}_A\Big(P(t_A),Q(t_A)\Big),\ \mathcal{O}_B\Big(P(t_B),\ Q(t_B)\Big),\cdots\right\}|q;t\rangle$$

$$= (-i)^N \chi_N \int_{q_a(t)=q_a,q_a(t')=q'_a} \left(\tilde{\prod_{a\tau}} dq_a(\tau)dp_a(\tau)\right)$$
$$\times \mathcal{O}_A\Big(p(t_A), q(t_A)\Big)\, \mathcal{O}_B\Big(p(t_B), q(t_B)\Big) \cdots$$
$$\times \exp\left[i\int_t^{t'} d\tau \left\{\sum_a p_a(\tau)\dot{q}_a(\tau) - H\Big(p(\tau), q(\tau)\Big)\right\}\right] . \quad (9.5.48)$$

ここで, 符号 T は時刻がもともと仮定した順序, つまり $t_A > t_B > \cdots$ ならば通常の積を表わす. しかし, 右辺は $\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B, \cdots$ について (反可換 c 数を入れ替えて負符号が出たところ以外は) 完全に対称だ. したがって, T を時間順序に演算子を並べるのに奇置換が必要なときにマイナスの符号を付ける時間順序積と解釈すれば, この形式は (t と t' の間の) 一般の時刻に対して正しい.

これまでは全体の位相因子 $(-i)^N \chi_N$ を勘定してきた. しかし, この位相は真空の間の遷移振幅にのみ効くのでこれ以降は重要ではない.

場の量子論へ移行するには, 9.2 節のボソン場のときと同じ道筋を辿ればよい. 演算子の時間順序積の真空期待値は (9.2.17) と同じ様な形式で与えられる.

$$\Big\langle \text{VAC, out}\Big| T\Big\{\mathcal{O}_A\Big[P(t_A), Q(t_A)\Big], \mathcal{O}_B\Big[P(t_B), Q(t_B)\Big],$$
$$\cdots\Big\}\Big|\text{VAC, in}\Big\rangle$$
$$\propto \int \Big[\prod_{\tau,\mathbf{x},m} dq_m(\mathbf{x},\tau)\Big]\Big[\prod_{\tau,\mathbf{x},m} dp_m(\mathbf{x},\tau)\Big]$$
$$\times\, \mathcal{O}_A\Big[p(t_A), q(t_A)\Big] \mathcal{O}_B\Big[p(t_B), q(t_B)\Big] \cdots$$
$$\times\, \exp\Bigg[i\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Big\{\int d^3x \sum_m p_m(\mathbf{x},\tau)\, \dot{q}_m(\mathbf{x},\tau)$$
$$-H\Big[q(\tau), p(\tau)\Big] + [i\epsilon \text{ 項}]\Big\}\Bigg] . \quad (9.5.49)$$

ここで, 比例係数は全ての演算子 $\mathcal{O}_A$, $\mathcal{O}_B$ 等について同じで, また, 「$i\epsilon$ 項」は真空の波動関数から出てくる. 前と同様に, a のような離散

的な添字は空間の位置 $\mathbf{x}$ と場の添字 m に置き換えた. また, 微分の積のチルダーは, 経路積分の定数位相にしか影響しないので落とした.

フェルミオンの場合とボソンの場合との主要な違いは q の積分の前に p を積分してしまいたくはないということだ. 実際, 電磁相互作用の標準理論では (そして, 古いベータ崩壊のフェルミの理論のような他の理論でも) 正準共役量 p_m は $\dot{q}_m$ に無関係な補助場であり, ラグランジアンは $\dot{q}_m$ について線形であるので, (9.5.49) の $\int d^3x\ \sum_m\ p_m\,\dot{q}_m - H$ はそのままでラグランジアン L になっている. ゼロでない量子数を持つフェルミオン場 (たとえば, 量子電磁理論の電子場等) のハミルトニアンの各項は, 同じ数の p (これは $q^\dagger$ に比例する) と q を持っている. 特に, ハミルトニアンの自由粒子項 H_0 は p と q の双一次式であり, $\mathcal{D}$ をある数値「行列」として,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x\ \sum_m p_m(\mathbf{x},\tau)\dot{q}_m(\mathbf{x},\tau) - H_0\Big[q(\tau),p(\tau)\Big] +\ [i\epsilon\ \text{項}] \right\}$$
$$= -\sum_{mn} \int d^4x\ d^4y\ \mathcal{D}_{mx,ny}\, p_m(x)\, q_n(y) \tag{9.5.50}$$

と書ける. 相互作用ハミルトニアン $V \equiv H - H_0$ は q と p の同じ数の積 (係数はボソン場に依ってもよい) の和であるから, (9.5.49) を V の冪で展開すると, 以下の形のフェルミオン的な積分の和を得る.

$$\mathcal{I}_{n_1m_1n_2m_2\cdots n_Nm_N}(x_1,y_1,x_2,y_2\cdots,x_N,y_N) \equiv \int \Big[\prod_{\tau,\mathbf{x},m} dq_m(\mathbf{x},\tau)\Big]$$
$$\times \Big[\prod_{\tau,\mathbf{x},m} dp_m(\mathbf{x},\tau)\Big] q_{m_1}(x_1)\, p_{n_1}(y_1)\, q_{m_2}(x_2)\, p_{n_2}(y_2)$$
$$\cdots q_{m_N}(x_N)\, p_{n_N}(y_N)$$
$$\times\ \exp\Big(-i \sum_{mn} \int d^4x\, d^4y \mathcal{D}_{mx,ny}\, p_m(x)\, q_n(y) \Big)\,. \tag{9.5.51}$$

この積分はファインマン・ダイアグラムで可能な頂点の集合一つ毎に現れ, その係数はそれぞれの頂点に対応する相互作用項の場の積の係数に i をかけたものだ.

この種の積分を計算するには, 最初にこのような積分全ての生成関数を考える.

$$\mathcal{I}(f,g) \equiv \int \Big[\prod_{\mathbf{x},\tau,m} dq_m(\mathbf{x},\tau)\, dp_m(\mathbf{x},\tau)\Big]$$
$$\times \exp\Big(-i\sum_{mn}\int d^4x\, d^4y\, \mathcal{D}_{mx,ny}\, p_m(x)\, q_n(y)$$
$$-i\sum_m \int d^4x\, p_m(x)\, f_m(x) - i\sum_n \int d^4y\, g_n(y)\, q_n(y)\Big) \,. \quad (9.5.52)$$

ここで $f_m(x)$ と $g_n(y)$ は任意の反可換 c 数関数だ. 新しい積分変数に移る.

$$p'_m(x) = p_m(x) + \sum_n \int d^4y\, g_n(y)\, (\mathcal{D}^{-1})_{ny,mx} \,,$$

$$q'_n(y) = q_n(y) + \sum_m \int d^4x\, (\mathcal{D}^{-1})_{ny,mx}\, f_m(x) \,.$$

並進不変性の条件 (9.5.36) を使うと次の式が導ける.

$$\mathcal{I}(f,g) = \exp\Big(i\sum_{mn}\int d^4x\, d^4y\, (\mathcal{D}^{-1})_{ny,mx}\, g_n(y)\, f_m(x)\Big)$$
$$\times \int \Big[\prod_{\mathbf{x},\tau,m} dq'_m(\mathbf{x},\tau)\, dp'_m(\mathbf{x},\tau)\Big]$$
$$\times \exp\Big(-i\sum_{mn}\int d^4x\, d^4y\, \mathcal{D}_{mx,ny}\, p'_m(x)\, q'_n(y)\Big) \,. \quad (9.5.53)$$

この積分は (9.5.38) を使うとわかるように, Det $\mathcal{D}$ に比例する定数 (つまり関数 f と g から独立) だ. さらに, 重要なのは最初の因子だ. この因子を gf で冪展開し, (9.5.52) の直接の展開と比較すると, 以下を得る.

$$\mathcal{I}_{n_1 m_1 n_2 m_2 \cdots n_N m_N}(x_1, y_1, x_2, y_2 \cdots, x_N, y_N)$$
$$\propto \sum_{\text{pairings}} \delta_{\text{pairing}} \prod_{\text{pairs}} \Big(-i\mathcal{D}^{-1}\Big)_{\text{paired }mx,ny} \,. \quad (9.5.54)$$

ここで, 比例定数は, x, y, m, n にも, これらの変数の個数にも依らない. この和は全ての p と q の対の異なる取り方についてのものだ. ここで, 対の順序が異なるものは同じ対の取り方だとする. 言い換えると, 和は p か q のどちらかの $N!$ 個の置換について取っている. 符号因子 δ_{pairing} はこの置換が偶のときは $+1$, 奇のときには -1 だ.

符号因子と対の取り方についての和は前のファインマン則の導出で出会ったものと丁度同じだ. 対の取り方についての和は, ファインマン則で頂点に伴う線の連結の仕方についての和に対応する. そして, 因子 $(\mathcal{D}^{-1})_{mx,ny}$ は $q_m(x)$ を $p_n(y)$ と対にしたときのプロパゲーターだ. スピン $\frac{1}{2}$ のディラック形式では自由粒子の作用は以下で与えられる.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \sum_m p_m(\mathbf{x},\tau)\dot{q}_m(\mathbf{x},\tau) - H_0\Big[q(\tau),p(\tau)\Big] \right\}$$
$$= -\int d^4x\, \bar{\psi}(x)\,[\gamma^\mu\,\partial_\mu + m]\,\psi(x)\,. \tag{9.5.55}$$

ただし, m を 4 つの値をとるディラックの添字として, 通常の記法で正準変数は,

$$q_m(x) = \psi_m(x)\,, \qquad p_m(x) = -[\bar{\psi}(x)\,\gamma^0]_m = i\psi^\dagger_m(x) \tag{9.5.56}$$

となっている. (9.5.50) と比較すると, 以下がわかる.

$$\mathcal{D}_{mx,ny} = \left[\gamma^0\,\left(\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} + m - i\epsilon\right)\right]_{mn}\delta^4(x-y)$$
$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\gamma^0[i\gamma^\mu\,k_\mu + m - i\epsilon]\right)_{mn}\,e^{ik\cdot(x-y)}\,. \tag{9.5.57}$$

(細かく計算することはここではしないが, $i\epsilon$ 項は 9.2 節のスカラー場のときとほとんど同じように生じる.) このため, プロパゲーターは,

$$(\mathcal{D}^{-1})_{mx,ny} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\left([i\gamma^\mu\,k_\mu + m - i\epsilon]^{-1}[-\gamma^0]\right)_{mn}\,e^{ik\cdot(x-y)} \tag{9.5.58}$$

となり, 演算子形式で求めたものと同じだ. 余分の因子 $-\gamma^0$ はこのプロパゲーターは $T\{\psi_m(x), -[\bar{\psi}(y)\,\gamma^0]_n\}$ の真空期待値であり, $T\{\psi_m(x), \bar{\psi}_n(y)\}$ の真空期待値ではないことによる.

演算子法でよりも経路積分法で解くほうが簡単な問題の例として, ディラック場が外場とのみ相互作用するときの真空→真空振幅の外場依存性を計算する. ラグランジアンを以下のようにとる.

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}[\gamma^\mu \partial_\mu + m + \Gamma]\psi\,. \tag{9.5.59}$$

ここで, $\Gamma(x)$ は x に依存する行列で, フェルミオンと外場との相互作用をあらわす. (9.5.49) によれば, この外場のもとでの真空の遷移振幅は,

$$\langle \text{VAC, out}|\text{VAC, in}\rangle_\Gamma \propto \int \Big[\prod_{\tau,\mathbf{X},m} dq_m(\mathbf{x},\tau)\Big]\Big[\prod_{\tau,\mathbf{X},m} dp_m(\mathbf{x},\tau)\Big] \times \exp\left\{-i\int d^4x\; p^T\,\gamma^0[\gamma^\mu\partial_\mu + m + \Gamma - i\epsilon]\,q\right\} \tag{9.5.60}$$

で与えられる. ここで, 比例係数は $\Gamma(x)$ に依らない. これを以下のように書き換える.

$$\langle \text{VAC, out}|\text{VAC, in}\rangle_\Gamma \propto \int \Big[\prod_{\tau,\mathbf{X},m} dq_m(\mathbf{x},\tau)\Big]\Big[\prod_{\tau,\mathbf{X},m} dp_m(\mathbf{x},\tau)\Big] \times \exp\left\{-i\sum_{mn}\int d^4x\, d^4y\; p_m(x)\, q_n(y)\, \mathcal{K}[\Gamma]_{mx,ny}\right\}. \tag{9.5.61}$$

ここで,

$$\mathcal{K}[\Gamma]_{mx,ny} = \left(\gamma^0\,\left[\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m + \Gamma(x) - i\epsilon\right]\right)_{mn} \delta^4(x-y) \tag{9.5.62}$$

だ. これを計算するために積分変数 $q_n(x)$ を,

$$q'_m(x) \equiv \sum_n \int d^4y\; \mathcal{K}[\Gamma]_{mx,ny}\, q_n(y) \tag{9.5.63}$$

と変換する. 残った積分は Γ に依存しないので, 真空の遷移振幅は変数変換から生じる (9.5.38) の行列式のみを通じて外場に依存する.

$$\langle \text{VAC, out}|\text{VAC, in}\rangle_\Gamma \propto \text{ Det } \mathcal{K}[\Gamma]\,. \tag{9.5.64}$$

摂動論の結果を再現するために以下のように書く.

$$\mathcal{K}[\Gamma] \equiv \mathcal{D} + \mathcal{G}[\Gamma]\,, \tag{9.5.65}$$

$$\mathcal{G}[\Gamma]_{mx,ny} = \left(\gamma^0\,\Gamma(x)\right)_{mn}\,\delta^4(x-y)\,. \tag{9.5.66}$$

そして, $\mathcal{G}[\Gamma]$ で冪展開をする. その結果 (9.5.64) より,

$$\begin{aligned}\langle \text{VAC, out}|\text{VAC, in}\rangle_\Gamma &\propto \text{ Det }\left(\mathcal{D}[1+\mathcal{D}^{-1}\mathcal{G}[\Gamma]]\right)\\ &= [\text{Det}\,\mathcal{D}]\ \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\text{Tr}\,(\mathcal{D}^{-1}\mathcal{G}[\Gamma])^n\right)\end{aligned} \tag{9.5.67}$$

となる. これはちょうどファインマン則から期待される結果だ. この理論では内線の寄与は $-i\mathcal{D}^{-1}$, 頂点は $-i\mathcal{G}[\Gamma]$ だ. したがって, n 個の $-\mathcal{D}^{-1}\mathcal{G}[\Gamma]$ の積のトレースは n 個の頂点が n 個の内線でつながったループに相当する. $1/n$ はそのようなループに付随する通常の組合せ因子だ (6.1 節を見よ). 符号因子が $(-1)^n$ ではなく $(-1)^{n+1}$ になっているのは, フェルミオンのループには余分にマイナス符号がつくからだ. また, 真空の遷移振幅は連結されていない任意の個数のループからも寄与があるので, n に関する和の全体が指数関数の引数となっている. Γ に依存しない因子 Det $\mathcal{D}$ は, ファインマン則で導くのはそれ程簡単ではない. これは頂点を持たないフェルミオンのループが任意個数あるものの寄与になっている.

より重要なのは, (9.5.64) のような表式からは, トポロジー的定理を使って $\mathcal{K}[\Gamma]$ のようなカーネルの固有値についての非摂動論的結果を導けることだ. これは 4 巻で更に詳しく調べる.

9.6 量子電磁理論の経路積分形式

量子力学の経路積分による取り扱いは, 量子電磁理論のような質量ゼロのスピン 1 の粒子のゲージ理論で本領を発揮する. 前章の量子電磁理論のファインマン則の導出では, 非常に大雑把な議論を行って, 光子のプロパゲーター $\Delta^{\mu\nu}(q)$ の中の q^μ や q^ν に比例する項は落とせて, 純粋に時間的な項はハミルトニアンのクーロン項を打消し, 光子の有効プロパゲーターは $\eta^{\mu\nu}/q^2$ だと論じた. この結果を 8 章の方法で本当に正当化するにはファインマン・ダイアグラムの複雑な解析が必要だ. しかし, 経路積分法では全くファインマン・ダイアグラムを詳細に考察せずに, 光子のプロパゲーターが望みの形で得られる.

8 章では, クーロン・ゲージでは荷電粒子と光子の相互作用のハミルトニアンは以下の形をとると述べた.

$$H[\mathbf{A},\mathbf{\Pi}_\perp,\cdots] = H_{\mathrm{M}}+\int d^3x\left[\tfrac{1}{2}{\mathbf{\Pi}_\perp}^2+\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})^2-\mathbf{A}\cdot\mathbf{J}\right]+V_{\mathrm{Coul}}\,. \tag{9.6.1}$$

ここで, $\mathbf{A}$ はベクトルポテンシャルで, クーロン・ゲージ条件,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=0 \tag{9.6.2}$$

にしたがう. また, $\mathbf{\Pi}_\perp$ はその共役量の横波部分であり, 同じ拘束条件を満たす.

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{\Pi}_\perp=0\,. \tag{9.6.3}$$

また, H_{M} は物質のハミルトニアンで, V_{Coul} は以下のクーロン・エネルギーだ.

$$V_{\mathrm{Coul}}(t)=\tfrac{1}{2}\int d^3x\,d^3y\;J^0(\mathbf{x},t)J^0(\mathbf{y},t)\Big/4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\,. \tag{9.6.4}$$

他のハミルトニアン系と同じように, 時間順序積の真空期待値を経

路積分で書ける.*

$$\langle T\{\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\}\rangle_{\rm VAC} = \int\left[\prod_{x,i} da_i(x)\prod_{x,i} d\pi_i(x)\prod_{x,\ell} d\psi_\ell(x)\right]$$
$$\times\,\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\exp\left\{i\int d^4x\left[\boldsymbol{\pi}\cdot\dot{\mathbf{a}}-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2-\tfrac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{a})^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{J}+\mathcal{L}_{\rm M}\right]\right.$$
$$\left.-i\int dt\,V_{\rm Coul}\right\}\left[\prod_x\delta\Big(\nabla\cdot\mathbf{a}(x)\Big)\right]\left[\prod_x\delta\Big(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}(x)\Big)\right]. \qquad (9.6.5)$$

ここで, $\psi_\ell(x)$ は一般的な物質場だ. (9.6.5) を物質場のラグランジアン密度で書くときには, $H_{\rm M}$ は局所的で, (スピノル電磁理論のときのように) 物質 ψ について線形か, もしくは (スカラー電磁理論のときのように) 場に依存しない係数を持つ二次式だ. (9.6.5) には, 拘束条件 (9.6.2) と (9.6.3) を満たすようにデルタ関数を代入してある.**

(9.6.5) の指数関数の引数は, $\boldsymbol{\pi}$ の独立成分 (たとえば, π_1 と π_2) について明らかに二次だ. そして, $\boldsymbol{\pi}$ の 2 次の項の係数は場に依存しない. したがって, (9.A.9) によれば, $\boldsymbol{\pi}$ についての積分は $\boldsymbol{\pi}$ を指数関数の引数の停留点 $\boldsymbol{\pi}=\dot{\mathbf{a}}$ に等しく置いたもので (定数因子を除いて) 与えられる.

$$\langle T\{\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\}\rangle_{\rm VAC} = \int\left[\prod_{x,i} da_i(x)\prod_{x,\ell} d\psi_\ell(x)\right]$$
$$\times\,\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\ \exp\left\{i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\dot{\mathbf{a}}^2-\frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{a})^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}+\mathcal{L}_{\rm M}\right]\right.$$

---

*$\pi(x)$ は量子演算子 $\mathbf{\Pi}_\perp$ を内挿してできた c 数場だ. この場の互いの間の交換関係および $\mathbf{A}$ との交換関係は $\mathbf{\Pi}$ と同じだ. しかし, $\mathbf{\Pi}$ と異なり, 全ての正準物質場と可換だ.

**これは厳密には正しくない. もし, 正準変数が, 例えば, a_1, a_2 と π_1, π_2 であって, a_3 と π_3 が (9.6.2) と (9.6.3) で与えられるこれらの変数の関数だとすると, 代入するべきデルタ関数は以下のものだ.

$$\prod_x \delta\left(a_3(x)+\partial_3^{-1}\Big(\partial_1 a_1(x)+\partial_2 a_2(x)\Big)\right)\delta\left(\pi_3(x)+\partial_3^{-1}\Big(\partial_1\pi_1(x)+\partial_2\pi_2(x)\Big)\right)$$

しかし, これは (9.6.5) のデルタ関数の積と因子 Det ∂_3^2 だけ違う. これは無限大ではあるが場に依存せず, (9.4.1) のような比をとると打消し合う.

$$-i\int dt\, V_{\text{Coul}} + [i\epsilon\ 項]\Bigg\}\left[\prod_x \delta\Big(\nabla\cdot\mathbf{a}(x)\Big)\right] . \tag{9.6.6}$$

この結果が本質的に共変的なことを示すには, あるトリックを使う. 新しい積分変数 $a^0(x)$ を導入して, 作用にあるクーロン項 $-\int dt\ V_{\text{Coul}}$ を以下で置き換える.

$$\int d^4x \left[-a^0(x)j^0(x) + \tfrac{1}{2}\Big(\nabla a^0(x)\Big)^2\right] . \tag{9.6.7}$$

(9.6.7) は a^0 について二次なので, $a^0(x)$ を (9.6.7) の停留点に置くことで, a^0 積分 (定数因子を除いて) を実行できる. その停留点は,

$$-j^0(x) - \nabla^2 a^0(x) = 0 ,$$

また書き換えると,

$$a^0(\mathbf{x},t) = \int d^3y\, \frac{j^0(\mathbf{y},t)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \tag{9.6.8}$$

だ. これを (9.6.7) に使うと, ちょうどクーロン作用 $-\int dt\, V_{\text{Coul}}$ がでる. したがって, (9.6.6) の指数関数の引数を以下のように書き換える.

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{a}}^2 - \tfrac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{a})^2 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{j} + \mathcal{L}_{\text{M}} - a^0 j^0 + \tfrac{1}{2}(\nabla a^0)^2 \\ &= -\tfrac{1}{4}\, f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + a_\mu j^\mu + \mathcal{L}_{\text{M}} + [全微分] .\end{aligned}$$

ここで, $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ であり, 積分は $\mathbf{a}$ と物質場のみならず, a^0 についても積分される. したがって, 経路積分 (9.6.6) は,

$$\begin{aligned}\langle T\{\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\}\rangle_{\text{VAC}} &\propto \int \left[\prod_{x,\mu} da_\mu(x)\right] \left[\prod_{x,\ell} d\psi_\ell(x)\right] \\ &\times \mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots \exp\Big(i\, I[a,\psi]\Big) \prod_x \delta\Big(\nabla\cdot\mathbf{a}(x)\Big) ,\end{aligned} \tag{9.6.9}$$

となる. ここで, I はもとの作用だ.

$$I[a,\psi] = \int d^4x\, [-\tfrac{1}{4}\, f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + a_\mu j^\mu + \mathcal{L}_{\text{M}}] + [i\epsilon\ 項] . \tag{9.6.10}$$

これで, クーロン・ゲージ条件を要請する最後のデルタ関数の積を除けば, 全てが明白にローレンツ不変でゲージ不変だ.** さらに進むために, 3巻でより難しい非可換ゲージ理論を扱う際のトリック[4,5]の簡単化したものを使う. 簡単になるように, 演算子 $\mathcal{O}_A[A,\Psi]$, $\mathcal{O}_B[A,\Psi], \cdots$, 作用 $I[a,\psi]$, 測度 $[\prod da][\prod d\psi]$ が全てゲージ不変な場合を扱う.

まず最初に (9.6.9) にある全ての場の積分変数 $a_\mu(x)$ と $\psi(x)$ を以下の新しい変数に変換する.

$$a_{\mu\Lambda}(x) \equiv a_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)\,, \tag{9.6.11}$$

$$\psi_{\ell\Lambda}(x) \equiv \exp\Big(i\, q_\ell \Lambda(x)\Big)\psi_\ell(x)\,. \tag{9.6.12}$$

ここで, $\Lambda(x)$ は任意の有限な関数だ. これは積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ を $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy$ と読み替えるのと同じ数学的に自明な操作なので, 仮定した理論のゲージ不変性を使う必要はない. 次に, ゲージ不変性を使って, 作用, 測度, $\mathcal{O}$ 関数にある $a_{\mu\Lambda}(x)$ と $\psi_{\ell\Lambda}(x)$ を元の場 $a_\mu(x)$ と $\psi_\ell(x)$ にそれぞれ変換する. そうすると, (9.6.9) は以下のようになる.

$$\begin{aligned}&\Big\langle T\Big\{\mathcal{O}_A[A,\Psi],\,\mathcal{O}_B[A,\Psi],\cdots\Big\}\Big\rangle_{\text{VAC}}\\ &\quad\propto \int\left[\prod_{x,\mu} da_\mu(x)\right]\left[\prod_{x,\ell} d\psi_\ell(x)\right]\,\mathcal{O}_A[a,\psi]\mathcal{O}_B[a,\psi]\cdots\\ &\qquad\times \exp\Big(i\,I[a,\psi]\Big)\prod_x \delta\Big(\nabla\cdot\mathbf{a}(x)+\nabla^2\Lambda(x)\Big)\,.\end{aligned} \tag{9.6.13}$$

関数 $\Lambda(x)$ は無作為に選んだので, 見た目と違い (9.6.13) の右辺はこの関数に依存できない. これを利用して経路積分をより便利な形に書く. (9.6.13) に以下の関数をかける.

$$B[\Lambda,a] = \exp\left(-\tfrac{1}{2}i\alpha\int d^4x\,\left(\partial_0 a^0 - \nabla^2\Lambda\right)^2\right)\,. \tag{9.6.14}$$

**$a^0(x)$ がいまは (9.6.8) の値に等しくはなく, 独立な積分変数であることに注意しよう. 最初に $a^0(x)$ について積分すると (9.6.6) に戻るが, これからはそれをせずに $\mathbf{a}(x)$ と同等に扱う.

(ここで, α は任意の定数とする.) そして, $\Lambda(x)$ について積分する. 積分変数 $\Lambda(x)$ をずらし, (9.6.13) が実際に Λ から独立であることを使うと, この影響は単に, (9.6.13) に場に依存しない定数,

$$\int \left[\prod_x d\Lambda(x)\right] \exp\left(-\tfrac{1}{2}i\alpha\int d^4x\,(\nabla^2\Lambda)^2\right) \tag{9.6.15}$$

を掛けただけだとわかる. この因子は真空期待値の連結部分では打消し合うので, 実際には何の物理的影響も無い. しかし, (9.6.13) は $a^\mu(x)$ と $\psi(x)$ について積分した後にのみ Λ から独立だ. $a^\mu(x)$ と $\psi(x)$ について積分する前に $\Lambda(x)$ について積分することもできて, その場合は (9.6.13) の因子 $\prod_x \delta\Big(\nabla\cdot\mathbf{a}(x)+\nabla^2\Lambda\Big)$ は以下で置き換えられる.

$$\begin{aligned}\int \left[\prod_x d\Lambda(x)\right] \exp\left(-\tfrac{1}{2}i\alpha\int d^4x\,(\partial_0 a^0-\nabla^2\Lambda)^2\right)&\\ \times\prod_x \delta\Big(\nabla\cdot\mathbf{a}(x)+\nabla^2\Lambda\Big)&\\ \propto \exp\left(-\tfrac{1}{2}i\alpha\int d^4x\,(\partial_\mu a^\mu)^2\right)\ .&\end{aligned} \tag{9.6.16}$$

ここで,「$\propto$」は, 場から独立な比例係数で比例していることを意味する. 定数因子を落とすと, (9.6.9) はいまや, 以下で与えられる.

$$\begin{aligned}\langle T\{\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\}\rangle_{\rm VAC} \propto \int \left[\prod_{x,\mu} da_\mu(x)\right]\left[\prod_{x,\mu} d\psi_\ell(x)\right]&\\ \mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\exp\left(iI_{\rm eff}[a,\psi]\right)\ .&\end{aligned} \tag{9.6.17}$$

ここで,

$$I_{\rm eff}[a,\psi] = I[a,\psi]-\tfrac{1}{2}\alpha\int(\partial_\mu a^\mu)^2 d^4x \tag{9.6.18}$$

だ. これは明白にローレンツ共変だ.

(9.6.18) の新しい項は作用の自由部分への寄与と考えることができる. この光子の部分は以下のとおりだ.

$$I_0[a] = \int d^4x\ \left[-\tfrac{1}{4}(\partial_\mu a_\nu-\partial_\nu a_\mu)(\partial^\mu a^\nu-\partial^\nu a^\mu)-\tfrac{1}{2}\alpha(\partial_\mu a^\mu)^2+[i\epsilon\ \text{項}]\right]$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, a^\mu(x)\, a^\nu(y)\, D_{\mu x,\nu y}\,. \tag{9.6.19}$$

ここで,

$$\mathcal{D}_{\mu x,\nu y} = \left[\eta_{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial y_\rho} - (1-\alpha)\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\right]\delta^4(x-y) + [i\epsilon\ 項]$$

$$= (2\pi)^{-4}\int d^4q\Big[\eta_{\mu\nu}\, q^2 - (1-\alpha)q_\mu q_\nu - i\epsilon\eta_{\mu\nu}\Big]e^{iq\cdot(x-y)} \tag{9.6.20}$$

とした. こうすると, 光子のプロパゲーターは (9.6.20) の被積分関数にある 4×4 行列の逆をとって, ただちに以下のように得られる.

$$\Delta_{\mu x,\nu y} = (2\pi)^{-4}\int d^4q\left[\frac{\eta^{\mu\nu}}{q^2-i\epsilon} + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\,\frac{q^\mu q^\nu}{(q^2-i\epsilon)^2}\right]e^{iq\cdot(x-y)}\,. \tag{9.6.21}$$

α は一番便利と思われる値に選べばよい. よく使われる選択枝は二つあり, その一つは $\alpha = 1$ で, これはファインマン・ゲージでのプロパゲーター,

$$\Delta^{\text{Feynman}}_{\mu x,\nu y} = (2\pi)^{-4}\int d^4q\left[\frac{\eta^{\mu\nu}}{q^2-i\epsilon}\right]e^{iq\cdot(x-y)} \tag{9.6.22}$$

を与える. もう一つは $\alpha = \infty$ で, この場合は, 因子 (9.6.14) はデルタ関数のように働き, ランダウ・ゲージ (しばしばローレンツ・ゲージとも呼ばれる) でのプロパゲーター,

$$\Delta^{\text{Landau}}_{\mu x,\nu y} = (2\pi)^{-4}\int d^4q\left[\frac{\eta^{\mu\nu}}{q^2-i\epsilon} - \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2-i\epsilon)^2}\right]e^{iq\cdot(x-y)} \tag{9.6.23}$$

を与える. このような明白にローレンツ不変な相互作用とプロパゲーターは実際の計算に非常に有用だ.

9.7 種々の統計性*

ここで 4 章で持ち上がった問題を取り上げる. すなわち, 同一粒子を交換したときに状態ベクトルにはどのような変化が可能か, という

*この節はこの本の展開の主要な流れからは若干はずれており, 最初に読むときは省略してもよい.

ことだ.

この目的のために, 散乱過程の始状態か終状態を用意することを考える. このどちらかの状態にある区別不可能な粒子の集合を運動量 $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, 等の標準的な配置から, 非相対論的量子力学が適用できるように, 粒子を互いに充分離れた状態に保ったままゆっくり変化する外場を加え, 運動量 $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, 等を持つ特定の配置に持っていったとする. (ここで, スピンの添字は陽に表わさない. それらは運動量添字にともなうとする.) この過程の振幅を計算するためには, 9.1 節の q と p を, 場とその共役量とせずに, 粒子の位置と運動量とした経路積分法が使える.** これらは粒子がボソンであろうと, フェルミオンであろうと, また他のものであろうと, 常に反交換関係ではなく交換関係を満たす. したがって, ここまででは特に統計性を決めていない. (9.1.34) の経路積分表式は振幅 $\langle\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots|\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\cdots\rangle_{\mathrm{D}}$ を, 1 粒子が運動量 $\mathbf{k}_1$ から運動量 $\mathbf{p}_1$ へ連続的に持ってこられ, 別の同種粒子が運動量 $\mathbf{k}_2$ から運動量 $\mathbf{p}_2$ へ連続的に持ってこられ, 等々の経路についての積分として与える. 添字「D」は, これが区別可能な粒子について計算した振幅であることを意味する. 特に, この振幅は p と同時の k の並べ変えについて対称だ. しかし, p と k の別々の並べ変えについては特に対称性を持たない. しかし, もし粒子が本当に区別不可能なら, トポロジー的に異なるが同じ最終の配置を与える経路が他に存在しなければならない. 空間の次元が $d \geq 3$ であるとき, そのような経路は $\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\cdots$ を $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots$ の何等かの自明でない置換 $\mathcal{P}$ に持っていくものしかない.†

**ここではライドロー (Laidlaw) とド・ウィット (C. DeWitt)[11] の議論に従っている. ただし彼らは経路積分法を単なる始状態と終状態の準備のみならず, 散乱過程全体に使っている. 相対論的理論では粒子が生成・消滅するために, 経路積分法を粒子の軌跡ではなく場に適用する必要がある. ここでは, 充分初期か終期かで, 散乱過程を行う粒子が十分に離れた状態に話を限るのでこれは問題とならない.

†形式的にはこれは, $d \geq 3$ の配位空間の第一ホモトピー群は置換群に等しい, と表わされる.[12] N 個の区別不可能な粒子の「配位空間」とは N 個の d 次元ベクトルから, 互いに一致する (またはある任意の極限距離内にある) ベクトルを除いたもので, ベクトルの並べ変えだけ異なる配位を同一視したものだ.

したがって, 真の振幅は,

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle = \sum_{\mathcal{P}} C_{\mathcal{P}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}2}, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} \quad (9.7.1)$$

と書かれる. ここで和は, その状態の N 個の区別できない粒子の $N!$ 個の並べ変え全てについてであり, $C_{\mathcal{P}}$ は複素定数だ. この振幅は区別できない粒子に適した次の構成則を満たさなければならない.

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle = \frac{1}{N!} \int d^3q_1\, d^3q_2\, \cdots \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \cdots \rangle \times \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle \,. \quad (9.7.2)$$

(9.7.1) を使うと, これは,

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathcal{P}} C_{\mathcal{P}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}2}, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} \\ &\quad = \frac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P}', \mathcal{P}''} C_{\mathcal{P}'} C_{\mathcal{P}''} \int d^3q_1\, d^3q_2\, \cdots \\ &\qquad \times \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}'1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}'2}, \cdots | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} \langle \mathbf{q}_{\mathcal{P}''1}, \mathbf{q}_{\mathcal{P}''2}, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} \end{aligned}$$

を要求することになる. 置換 $\mathcal{P}''$ を右辺の最初の振幅の始状態と終状態両方に施すと, これは,

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathcal{P}} C_{\mathcal{P}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}2}, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} \\ &\quad = \frac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P}', \mathcal{P}''} C_{\mathcal{P}'} C_{\mathcal{P}''} \int d^3q_1\, d^3q_2\, \cdots \\ &\qquad \times \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}''\mathcal{P}'1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}''\mathcal{P}'2}, \cdots | \mathbf{q}_{\mathcal{P}''1}, \mathbf{q}_{\mathcal{P}''2}, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} \\ &\qquad \times \langle \mathbf{q}_{\mathcal{P}''1}, \mathbf{q}_{\mathcal{P}''2}, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} \end{aligned}$$

となる. しかし, 振幅 $\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}}$ は区別できる粒子の構成則を満たす.

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} = \int d^3q_1\, d^3q_2\, \cdots \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} \times \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} \,. \quad (9.7.3)$$

したがって, 物理的振幅の構成則は以下のように書かれる.

$$\sum_{\mathcal{P}} C_{\mathcal{P}} \left\langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}2}, \cdots \middle| \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \right\rangle_{\mathrm{D}} = \frac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P}', \mathcal{P}''} C_{\mathcal{P}'} C_{\mathcal{P}''} \times \left\langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}''\mathcal{P}'1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}''\mathcal{P}'2}, \cdots \middle| \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \right\rangle_{\mathrm{D}} .$$

これは,

$$C_{\mathcal{P}'\mathcal{P}''} = C_{\mathcal{P}'} C_{\mathcal{P}''} \tag{9.7.4}$$

が成立すれば, そして成立するときにのみ正しい. すなわち, 係数 $C_{\mathcal{P}}$ は置換群の 1 次元表現にならなければならない. しかし, 置換群のそのような表現は二つしかない. 一つは全ての置換に対して $C_{\mathcal{P}} = +1$ となる単位表現であり, もう一つの表現は $\mathcal{P}$ が偶の置換か奇の置換かに応じて $C_{\mathcal{P}} = +1$ か $C_{\mathcal{P}} = -1$ となる表現だ. これらの可能性はそれぞれボーズ統計とフェルミ統計に対応している.‡

この理論の望ましい特色は, なぜ 2 次元の場合が例外的かが明確なことだ. この場合にはトポロジー的に異なる経路が豊富に存在する.¶ 例えば, ある粒子が他の粒子の回りを何回かまわるという経路は 1 度も回らない経路に変形することができない. このため, 2 次元ではフェルミ統計やボーズ統計よりも一般的な置換についての性質を持つエニオン (anyon)[15] が存在する.[8a]

‡ボーズ統計でもフェルミ統計でもないパラ統計 (parastatistics) の可能性についても多くの文献で論じられている. 空間の次元が $d \geq 3$ であるとき, パラ統計にしたがう理論では全ての粒子がボソンかフェルミオンであり, これらの粒子が余分な量子数を持つために波動関数が運動量とスピンの置換のもとで通常と異なる性質を持つ理論と同等であることが証明されている.[13]

¶これを表して, 2 次元空間の第 1 ホモトピー群は置換群ではなく, より大きな組み紐群 (braid group) である[14] という.

補遺：多重ガウス積分

最初に有限個の実変数 ξ_r について, 以下の ξ の一般的 2 次関数の指数関数の多重積分を計算する.

$$\mathcal{I} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \prod_r d\xi_r \exp\left\{ -Q(\xi) \right\} , \tag{9.A.1}$$

$$Q(\xi) = \tfrac{1}{2} \sum_{rs} K_{rs}\xi_r\xi_s + \sum_r L_r\xi_r + M . \tag{9.A.2}$$

ここで, K_{rs}, L_r は任意定数であり, 行列 K は対称で特異でない以外は任意の行列であるとする. 積分の実行のために, K_{rs}, L_r, M が全て実で, K_{rs} が正である場合をまず考える. 一般的な結果は解析接続によって得られる.

任意の実対称行列は直交行列によって対角化できる. つまり, ある行列 $\mathcal{S}$ で, その転置が $\mathcal{S}^{\mathrm{T}} = \mathcal{S}^{-1}$ であるものを使って,

$$\left(\mathcal{S}^{\mathrm{T}} K \mathcal{S}\right)_{rs} = \delta_{rs}\kappa_r \tag{9.A.3}$$

とできる. K は正で特異ではないとの仮定から, 固有値 κ_r は正定値だ. 行列 $\mathcal{S}$ を使って,

$$\xi_r = \sum_s \mathcal{S}_{rs}\xi'_s \tag{9.A.4}$$

と変数変換をする. この変換のヤコビアン $|\mathrm{Det}\,\mathcal{S}|$ は 1 であり, (9.A.1) の多重積分は通常の積分の積になる.

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= e^{-M} \prod_r \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \exp\left\{ -\frac{\kappa_r}{2}\xi'^2 - (\mathcal{S}^{\mathrm{T}}L)_r\xi' \right\} \\ &= e^{-M} \prod_r \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa_r}} \exp\left\{ \frac{1}{2\kappa_r}(\mathcal{S}^{\mathrm{T}}L)_r^2 \right\} .\end{aligned} \tag{9.A.5}$$

しかし, 行列式と (9.A.3) の逆から,

$$\mathrm{Det}\,K = \prod_r \kappa_r , \qquad K^{-1}_{rs} = \sum_\ell \mathcal{S}_{n\ell}\mathcal{S}_{m\ell}\kappa_\ell^{-1}$$

となる．したがって，(9.A.5) は，

$$\mathcal{I} = \left(\mathrm{Det}\left(\frac{K}{2\pi}\right)\right)^{-1/2} \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{rs} L_r L_s K^{-1}_{rs} - M\right\} \tag{9.A.6}$$

と書かれる．(9.A.1) は K_{rs}, L_r, M の関数だ．この関数は，K_{rs} について，K_{rs} が実で正であり積分が収束する表面の近傍で解析的だ．また，そのような K_{rs} に対しては L_r と M について全領域で解析的だ．K_{rs}, L_r, M が全て実で K_{rs} が正のとき，(9.A.6) は (9.A.1) に等しく，平方根から必要とされるカットを持つ全複素平面への解析接続を与える．平方根の符号はこの解析接続によって決定される．場の理論では K_{rs} は「$i\epsilon$ 項」からくる小さな実部を除いては純虚数だ．

(9.A.6) を関数 (9.A.2) の停留点，

$$\bar{\xi}_r = -\sum_s K^{-1}_{rs} L_s \,, \tag{9.A.7}$$

$$\partial Q(\xi)/\partial \xi_r = 0 \qquad (\xi = \bar{\xi}\ \text{において}) \tag{9.A.8}$$

を用いて以下のように表わすと便利だ．

$$\mathcal{I} = \left(\mathrm{Det}\left(\frac{K}{2\pi}\right)\right)^{-1/2} \exp\left\{-Q(\bar{\xi})\right\} \,. \tag{9.A.9}$$

これが覚えておくべき結果だ．ガウス型積分は，行列式の因子を除いて指数関数の引数が停留する値に積分変数を等しくおけば求まる．

これを使って，積分，

$$I_{r_1\cdots r_{2N}} \equiv \int \left(\prod_r d\xi_r\right) \xi_{r_1}\xi_{r_2}\cdots\xi_{r_{2N}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{rs} K_{rs}\xi_r\xi_s\right\} \tag{9.A.10}$$

を計算する．(被積分関数で ξ 因子が奇数個のこの類の積分は明らかにゼロとなる．) (9.A.1) の $\exp(-\sum_r L_r\xi_r)$ の冪展開表示から，以下の和の法則を得る．

$$\sum_{N=0}^{\infty} \sum_{r_1 r_2\cdots r_{2N}} \frac{1}{(2N)!} I_{r_1 r_2\cdots r_{2N}} L_{r_1} L_{r_2} \cdots L_{r_{2N}}$$

$$= \int \left(\prod_r d\xi_r \right) \exp \left\{ -\sum_r L_r \xi_r - \frac{1}{2} \sum_{rs} K_{rs} \xi_r \xi_s \right\}$$
$$= \left[\mathrm{Det} \left(\frac{K}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{rs} L_r L_s K_{rs}^{-1} \right\}$$
$$= \left[\mathrm{Det} \left(\frac{K}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N! 2^N} \left(\sum_{rs} L_r L_s K_{rs}^{-1} \right)^N . \quad (9.A.11)$$

$L_{r_1} L_{r_2} \cdots L_{r_{2N}}$ の係数を両辺で比較すると, $I_{r_1 r_2 \cdots r_{2N}}$ が K^{-1} の積の和に比例しなければならないことがわかる. これは対称性により,

$$I_{r_1 r_2 \cdots r_{2N}} = c_N \sum_{\substack{\text{pairings} \\ \text{of } r_1 \cdots r_{2N}}} \prod_{\text{pairs}} (K^{-1})_{\text{paired indices}} \quad (9.A.12)$$

の形をとる. ここで, 和は添字 $r_1 \cdots r_{2N}$ の全ての対の取り方についての和だ. ここで, 二つの対の取り方はもし, それらが対の順序だけしか違わないとき, もしくは, 対の内部の添字の順序だけしか違わないときには, 同じと見なされる. 定数因子 c_N を求めるためには, (9.A.12) の対の取り方についての和に現れる項の数 ν_N は, 添字の置換の数 $(2N)!$ を対の置換の数 $N!$ と対内部での添字の置換の場合の数 2^N で割ったものであること, つまり,

$$\nu_N = \frac{(2N)!}{N! 2^N} \quad (9.A.13)$$

を使う. これより (9.A.12) は,

$$\sum_{r_1 r_2 \cdots r_{2N}} L_{r_1} L_{r_2} \cdots L_{r_{2N}} I_{r_1 r_2 \cdots r_{2N}} = \nu_N c_N \left(\sum_{rs} L_r L_s K_{rs}^{-1} \right)^N \quad (9.A.14)$$

となる. これを (9.A.11) と比較すると, 因子 $(2N)!$ と $N! 2^N$ は ν_N によって消去されて, 残ったのは,

$$c_N = \left[\mathrm{Det} \left(\frac{K}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \quad (9.A.15)$$

であることがわかる. たとえば,

$$I_{r_1 r_2} = I_0 (K^{-1})_{r_1 r_2} \ , \tag{9.A.16}$$

$$I_{r_1 r_2 r_3 r_4} = I_0 \Big[(K^{-1})_{r_1 r_2} (K^{-1})_{r_3 r_4} + (K^{-1})_{r_1 r_3} (K^{-1})_{r_2 r_4} + (K^{-1})_{r_1 r_4} (K^{-1})_{r_2 r_3} \Big] \tag{9.A.17}$$

などとなる. ここで, I_0 は添字のない積分で, 以下で与えられる.

$$I_0 \equiv \int \left(\prod_r d\xi_r \right) \exp\left\{ -\tfrac{1}{2} \sum_{rs} K_{rs} \xi_r \xi_s \right\} = \left[\mathrm{Det}\left(\frac{K}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \ . \tag{9.A.18}$$

問題

1. 非相対論的な質量 m の粒子が x 軸に沿って, ポテンシャル $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ のもとで運動している. この粒子が時刻 t_1 に x_1 にいるとき, 経路積分法を使って, 時刻 t に x と $x + dx$ の間にいる確率を求めよ.

2. 質量が $m \neq 0$ であるスピンゼロの 1 粒子状態の場の配位空間での波動関数を求めよ. この結果を使って, このような粒子の放出, 吸収に関するファインマン則を導け.

3. 質量が $m \neq 0$ である中性ベクトル粒子の理論において, 真空の場の配位空間での波動関数を求めよ. この結果を使って, この場のプロパゲーターの $i\epsilon$ 項の形を導け.

4. 自由なスピン 3/2 のラリタ・シュウィンガー場 ψ^μ のラグランジアン密度は, 以下で与えられる.

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}^\mu (\gamma^\nu \partial_\nu + m) \psi_\mu - \tfrac{1}{3} \bar{\psi}^\mu (\gamma_\mu \partial_\nu + \gamma_\nu \partial_\mu) \psi^\nu + \tfrac{1}{3} \bar{\psi}^\mu \gamma_\mu (\gamma^\sigma \partial_\sigma - m) \gamma^\nu \psi_\nu \ .$$

経路積分を使って，この場のプロパゲーターを決定せよ．

参考文献

1. R. P. Feynman, *The Principle of Least Action in Quantum Mechanics* (Princeton University, 1942; University Microfilms Publication No. 2948, Ann Arbor). また, R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, New York, 1965) も見よ. 一般的な参考文献としては J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics–A Functional Integral Point of View*, 第 2 版 (Springer-Verlag, New York, 1987) がある.

2. P. A. M. Dirac, *Phys. Zeits. Sowjetunion* **3**, 62 (1933).

3. R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948); *Phys. Rev.* **74**, 939, 1430 (1948); **76**, 749, 769 (1949); **80**, 440 (1950).

4. L. D. Faddeev and V. N. Popov, *Phys. Lett.* **B25**, 29 (1967). また, R. P. Feynman, *Acta Phys. Pol.* **24**, 697 (1963); S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **175**, 1580, 1604 (1968) も見よ.

5. B. De Witt, *Phys. Rev. Lett.* **12**, 742 (1964).

6. G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B35**, 167 (1971).

7. I. S. Gerstein, R. Jackiw, B. W. Lee, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D3**, 2486 (1971).

8. L. D. Faddeev, *Teor. Mat. Fizika*, **1**, 3 (1969); 英訳は *Theor. Math. Phys.* **1**, 1 (1970) にある.

8*a*. J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **44**, 956 (1958).

8*b*. K. Osterwalder and R. Schrader, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1423 (1972); *Commun. Math. Phys.* **31**, 83 (1973); *Commun. Math. Phys.* **42**, 281 (1975). オスターワルダー・シュレーダー原理は滑らかさ, ユークリッド共変性, 「鏡映正値性」, 置換対称性とクラスター分解からなる.

9. この節は主にポルチンスキー (J. Polchinski) との議論に触発された.

10. F. A. Berezin, *The Method of Second Quantization* (Academic Press, New York, 1966).

11. M. G. G. Laidlaw and C. M. De Witt, *Phys. Rev.* D **3**, 1375 (1970).

12. J. M. Leinaas and J. Myrheim, *Nuovo Cimento* **37 B**, 1 (1977).

13. Y. Ohnuki and S. Kamefuchi, *Phys. Rev.* **170**, 1279 (1968); *Ann. Phys.* **51**, 337 (1969); K. Drühl, R. Haag, and J. E. Roberts, *Commun. Math. Phys.* **18**, 204 (1970).

14. 組み紐群はアーティン (E. Artin) によって導入された. *The Collected Papers of E. Artin*, S. Lang and J. E. Tate 編 (Addison-Wesley, Reading, MA, 1965) を見よ.

15. F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 957 (1982); K. Fredenhagen, M. R. Gaberdiel, and S. M. Rüger, Cambridge preprint DAMTP-94-90 (1994). また, J. M. Leinaas and J. Myrheim の参考文献 12 も見よ.

第 10 章

非摂動論的方法

ここでは, 物理的な過程への高次の寄与を調べる. これは 1 つ以上のループを含むファインマン・ダイアグラムに対応する. このために, 摂動論の全ての次数で (そして, 場合によっては摂動論を超えて) 成立する結果を導く方法があると非常に有用だ. この章では, この目的のために, ハイゼンベルグ表示での相互作用する場の方程式と交換関係を利用する. ハイゼンベルグ表示と摂動論のファインマン・ダイアグラムをつなぐ重要な橋は 6.4 節で証明した定理にある. これは, $\alpha \to \beta$ の過程に演算子 $o_a(x)$, $o_b(y)$ 等に相当する頂点を余分に入れた全てのダイアグラムの和は, それらのハイゼンベルグ表示の演算子の時間順序積の行列要素,

$$\left(\Psi_\beta{}^-, T\Big\{-iO_a(x),\ -iO_b(y)\cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\right)$$

で与えられるというものだ. この特別な場合として, 演算子 $O_a(x)$, $O_b(x)$ などが素粒子の場であるとき, この行列要素は, 入る線がすべて状態 α の質量殻上にあり, 出る線がすべて状態 β の質量殻上にあり, 演算子 $O_a(x)$, $O_b(x)$ 等に相当する線が (プロパゲーターを含めて) 質量殻外にあるファインマン・ダイアグラム全ての和に等しい. このよ

うにして得られる非摂動論的な結果を調べた上で輻射補正の摂動計算を行うのが適切だ.

10.1 対称性

上に引用した定理の, 自明だが重要な応用は, 対称性を, 外線がすべて質量殻上にある S 行列要素へ適用するだけでなく, 外線の幾本か, または全てが質量殻外にあるファインマン・ダイアグラムにも適用することだ.

たとえば, 時空並進不変の対称性を考える. この対称性の結果, エルミートな 4 元ベクトル演算子 P^μ が存在し, 場とその共役場の演算子の任意の局所的な関数 $O(x)$ について,

$$\Big[P_\mu, O(x)\Big] = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}O(x) \tag{10.1.1}$$

が満たされている. ((7.3.28) と (7.3.29) を見よ.) また, α と β の状態は通常, 4 元運動量の固有状態に選ばれる.

$$P^\mu \Psi_\alpha{}^+ = p^\mu_\alpha \Psi_\alpha{}^+ , \qquad P^\mu \Psi_\beta{}^- = p^\mu_\beta \Psi_\beta{}^- . \tag{10.1.2}$$

これより, 場や場の微分のどのような局所的な関数 $O_a(x)$, $O_b(x)$ 等についても, 以下が満たされている.

$$\begin{aligned}
&(p_{\beta\mu} - p_{\alpha\mu})\left(\Psi_\beta{}^- , T\Big\{O_a(x_1)\, , O_b(x_2)\cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\right) \\
&= \left(\Psi_\beta{}^-, \Big[P_\mu, T\Big\{O_a(x_1),\, O_b(x_2)\cdots\Big\}\Big]\,\Psi_\alpha{}^+\right) \\
&= i\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\mu} + \frac{\partial}{\partial x_2^\mu} + \cdots\right) \\
&\quad \times \left(\Psi_\beta{}^- , T\Big\{O_a(x_1), O_b(x_2), \cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\right) .
\end{aligned} \tag{10.1.3}$$

この式の解は, 以下で与えられる.

$$\left(\Psi_\beta{}^-, T\Big\{O_a(x_1), O_b(x_2), \cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\right)$$

$$= \exp\Big(i(p_\beta - p_\alpha)\cdot x\Big)\, F_{ab\cdots}(x_1 - x_2, \cdots)\,. \tag{10.1.4}$$

ここで, x は時空座標の任意の平均でよい.

$$x^\mu = c_1 x_1^\mu + c_2 x_2^\mu + \cdots\,, \qquad c_1 + c_2 + \cdots = 1. \tag{10.1.5}$$

そして, F は x の間の差のみによる. (特に, 真空期待値は座標の差のみによる.) (10.1.4) は x^μ と座標の差について別個に積分することによってフーリエ変換でき, 以下の結果を得る.

$$\begin{aligned}&\int d^4x_1\, d^4x_2 \cdots \Big(\Psi_\beta{}^-, T\Big\{O_a(x_1), O_b(x_2), \cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\Big)\\ &\times \exp(-ik_1\cdot x_1 - ik_2\cdot x_2 - \cdots)\\ &\propto \delta^4(p_\beta - p_\alpha - k_1 - k_2 - \cdots)\,.\end{aligned} \tag{10.1.6}$$

6.4 節でみたように, 時間順序積の行列要素は, α の粒子が入り β の粒子が出て行き, $x_1, x_2, \cdots$ の頂点で単に終わる外線とを持つダイアグラムの組に通常の座標空間のファインマン則を適用して得られる. それに対応して, フーリエ変換 (10.1.6) は, 同じファインマン・ダイアグラムの組に質量殻外の外線が 4 元運動量 $k_1, k_2, \cdots$ を持って入るように運動量空間でのファインマン則を適用して得られる. (10.1.6) は単に, このファインマン・ダイアグラムの組が 4 元運動量を保存することを意味する. この結果は, 摂動論では各頂点で 4 元運動量が保存するから, 自明なものだ. したがって, 同じ結果が摂動論に依らずに出てきても驚くにはあたらない.

もう少し工夫をすれば, ハイゼンベルグ表示の場と「in」状態と「out」状態のローレンツ変換性を使って, 与えられた質量殻上や殻外の線を持つ全てのダイアグラムの和が最低次の項と同じローレンツ変換性を持つことを示すことができる.

電荷のような内部量子数の保存も同様に論じることができる. 7.3 節で示したように, 電荷 q_a を消す (または, 電荷 $-q_a$ を作る) 場か他

の演算子 $O_a(x)$ は, ハイゼンベルグ表示でも, 相互作用表示でも以下を満たす.

$$[Q, O_a(x)] = -q_a O_a(x) \ .$$

また, もし自由粒子状態 α と β が電荷 q_α と q_β を持てば, 対応する「in」状態と「out」状態も同様だ. これにより,

$$\begin{aligned}
&(q_\beta - q_\alpha)\ \left(\Psi_\beta{}^-, T\Big\{O_a(x), O_b(y), \cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\right) \\
&\quad = \left(\Psi_\beta{}^-, \Big[Q, T\Big\{O_a(x), O_b(y), \cdots\Big\}\Big]\ \Psi_\alpha{}^+\right) \\
&\quad = -(q_a + q_b + \cdots)\left(\Psi_\beta{}^-, T\Big\{O_a(x), O_b(y), \cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\right)
\end{aligned}$$

となる. したがって, 振幅 $\left(\Psi_\beta{}^-, T\Big\{O_a(x), O_b(y), \cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\right)$ は電荷が,

$$q_\beta = q_\alpha - q_a - q_b - \cdots \tag{10.1.7}$$

と保存しない限りゼロとなる.

これほど自明でない例としては, 荷電共役対称性がある. 5 章で見たように, 電子と陽電子の演算子を交換する演算子 C が存在する.

$$\begin{aligned}
\mathsf{C}\, a(\mathbf{p}, \sigma, e^-)\mathsf{C}^{-1} &= \xi^*\, a(\mathbf{p}, \sigma, e^+)\ , \\
\mathsf{C}\, a(\mathbf{p}, \sigma, e^+)\mathsf{C}^{-1} &= \xi\, a(\mathbf{p}, \sigma, e^-)\ .
\end{aligned}$$

ここで ξ は位相因子だ. 自由電子場 $\psi(x)$ については, これは,

$$\mathsf{C}\psi(x)\,\mathsf{C}^{-1} = \xi^* \beta C \psi(x)^*$$

をもたらす. ここで, βC は 4×4 行列で, (これまで用いてきた γ_5 が対角形となるディラック行列の表現では) 以下の形をとる.

$$\beta C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

これをスピノル電磁理論の自由電子の電流に使うと,

$$\mathsf{C}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\mathsf{C}^{-1} = -\bar{\psi}C\gamma^{\mu T}C\psi = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

となる. もし, C が電磁理論で保存されるものなら, それは自由光子場と反可換でなければならない.

$$\mathsf{C}(a^\mu)\mathsf{C}^{-1} = -a^\mu \ .$$

C が電磁理論のように H_0 のみならず相互作用とも可換な理論では, ハイゼンベルグ表示と相互作用表示の間の相似変換 $\Omega(t)$ とも可換だ. したがって, それは相互作用場の電流とも反可換となる.

$$\mathsf{C}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)\mathsf{C}^{-1} = -\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \ . \tag{10.1.8}$$

また, ハイゼンベルグ表示での電磁場とも反可換だ.

$$\mathsf{C}(A^\mu)\mathsf{C}^{-1} = -A^\mu \ . \tag{10.1.9}$$

このため, 電流や場の奇数個のどんな時間順序積の真空期待値もゼロとなる. したがって, 奇数個の光子の外線 (光子の質量殻上・外にかかわらず) のみを持つファインマン・ダイアグラムの和はゼロとなる.

この結果は, **ファリーの定理** (Furry's theorem)[1] として知られている. これは, 摂動論で, あるダイアグラムが光子の線を内部に I 本, 外部に E 本持ち電子のループ ℓ にそれぞれ光子が n_ℓ 本付いたとすると, (6.3.11) に似た次の関係式が成立することを使って証明される.

$$2I + E = \sum_\ell n_\ell \ .$$

これより, もし E が奇数なら, 少なくとも 1 つのループには光子が奇数本付いている. そのようなループについて, そのループをまわる電子の矢印の向きが反対の 2 つのダイアグラムは互いに打消し合う. し

たがって, ファリーの定理は, 各ダイアグラムではなくダイアグラムのある和について成立するという意味で, 並進不変性やローレンツ不変性と異なり, 多少自明でない対称性の結果だといえる. 10.1 図は歴史的に一番重要なファリーの定理の応用を表している. これは, 外から与えられた電磁場による光子の散乱で, 外場について 1 次 (また全ての奇数次) からは寄与が無いことを示している.

10.2 極の理論

この章で述べる非摂動論的方法の一番重要な応用は, ファインマン・ダイアグラムが外線が運ぶ運動量の関数としてどのような極を持つかを明らかにすることだ. しばしば, 物理的な過程の S 行列は一つの極の寄与のみでよく近似できる. また, 極の構造を理解しておくと, 後で粒子のプロパゲーターへの輻射補正を扱う際に有用だ.

以下の運動量空間の振幅を考える.

$$\int d^4x_1 \cdots d^4x_n \, e^{-iq_1\cdot x_1} \cdots e^{-iq_n\cdot x_n} \left\langle T\left\{A_1(x_1)\cdots A_n(x_n)\right\}\right\rangle_0 \equiv G(q_1\cdots q_n)\,. \tag{10.2.1}$$

A は任意のローレンツ型のハイゼンベルグ表示の演算子であり, $\langle\cdots\rangle_0$ は真の真空 $\Psi_0{}^+ = \Psi_0{}^- \equiv \Psi_0$ での期待値を表す. 6.4 節で論じたように, もし, $A_1, \cdots A_n$ がラグランジアンに現れる通常の場であれば, (10.2.1) は通常のファインマン則を使って計算される項で, 場 $A_1, \cdots A_n$ に相当する全ての外線が質量殻外の 4 元運動量 $q_1 \cdots q_n$ を持って入射するダイアグラムの和に等しい. しかし, 話はこの場合に限られるわけではない. それは, A_i は場と場の微分の任意の局所関数であってもよいからだ.

興味があるのは, 外線のさまざまな部分集合が運ぶ全 4 元運動量の不変 2 乗についての G の極だ. 話を明確にするために, $1 \le r \le n-1$

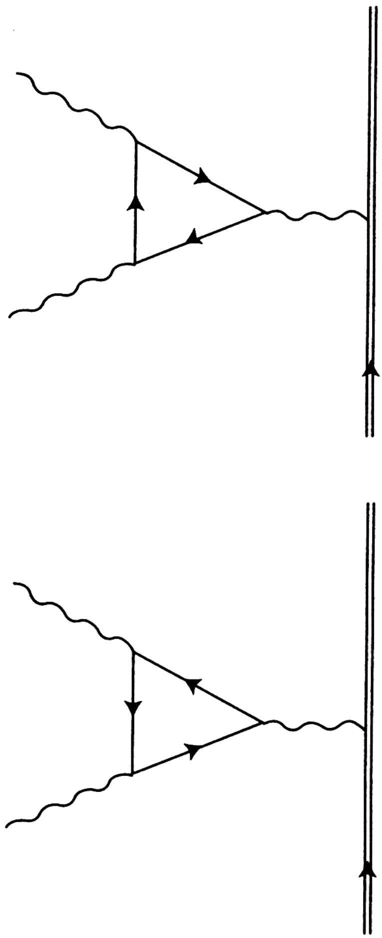


図 10.1: 電磁場による光子の散乱の最低次のダイアグラム. ここで, 直線は仮想電子, 波線は実と仮想光子, そして, 2 重線は電磁場の源となる原子核のような重い粒子を表す. これらの二つのダイアグラムの寄与は, 電荷共役不変性から要求されるとおり, 打消し合う.

として,

$$q \equiv q_1 + \cdots + q_r = -q_{r+1} - \cdots - q_n \tag{10.2.2}$$

で与えられる運動量の 2 乗, q^2 の関数としての G を考える. ここで証明するのは, m を状態 $A_1^\dagger \cdots A_r^\dagger \Psi_0$ と $A_{r+1} \cdots A_n \Psi_0$ との行列要素がゼロでない任意の 1 粒子状態の質量として, G が $q^2 = -m^2$ で極を持ち, その留数が以下で与えられるということだ.

$$G \to \frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}}{q^2 + m^2 - i\epsilon} (2\pi)^7 \delta^4(q_1 + \cdots + q_n)$$
$$\times \sum_\sigma M_{0|\mathbf{q},\sigma}(q_2 \cdots q_r) M_{\mathbf{q},\sigma|0}(q_{r+2} \cdots q_n) . \tag{10.2.3}$$

ここで, M は ($p^0 \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ として) 以下で定義される.*

$$\int d^4x_1 \cdots d^4x_r \, e^{-iq_1 \cdot x_1} \cdots e^{-iq_r \cdot x_r} \Big(\Psi_0, T\Big\{A_1(x_1) \cdots A_r(x_r)\Big\} \Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big)$$
$$= (2\pi)^4 \, \delta^4(q_1 + \cdots + q_r - p) M_{0|\mathbf{p},\sigma}(q_2 \cdots q_r) , \tag{10.2.4}$$

$$\int d^4x_{r+1} \cdots d^4x_n \, e^{-iq_{r+1} \cdot x_{r+1}} \cdots e^{-iq_n \cdot x_n}$$
$$\times \Big(\Psi_{\mathbf{p},\sigma}, T\Big\{A_{r+1}(x_{r+1}) \cdots A_n(x_n)\Big\} \Psi_0\Big)$$
$$= (2\pi)^4 \, \delta^4(q_{r+1} + \cdots + q_n + p) M_{\mathbf{p},\sigma|0}(q_{r+2} \cdots q_n) . \tag{10.2.5}$$

そして, 和は質量 m の粒子の全てのスピン (と他の) 状態についてとる.

証明に進む前に, (10.2.3) を以下のように多少回りくどい形に書き換えるとその重要性が浮かび上がることに注意する.

$$G(q_1 \cdots q_n) \to \int d^4k$$
$$\times \Bigg[(2\pi)^4 \, \delta^4(q_1 + \cdots + q_r - k) \, (2\pi)^{3/2}$$

*時間的に変化する外場が無ければ, 「in」状態と「out」状態には差異が無いから, $\Psi_{\mathbf{p},\sigma}{}^+ = \Psi_{\mathbf{p},\sigma}{}^- = \Psi_{\mathbf{p},\sigma}$ となっていることを思い出そう.

$$\times \left(2\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}\right)^{1/2} M_{0|\mathbf{k},\sigma}(q_2\cdots q_r)\Big]$$

$$\times\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\ \frac{1}{k^2+m^2-i\epsilon}\right]$$

$$\times\Big[(2\pi)^4\,\delta^4(k+q_{r+1}+\cdots+q_n)\,(2\pi)^{3/2}$$

$$\times\ \left(2\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}\right)^{1/2} M_{\mathbf{k},\sigma|0}(q_{r+2}\cdots q_n)\Big]\ . \quad (10.2.6)$$

これはちょうど, 最初の r 本の外線と残りの $n-r$ 本の外線を一本の質量 m の内線がつなぐファインマン・ダイアグラムに期待される表式だ.** しかし, 質量 m の粒子がラグランジアンに現れる場に相当する必要はない. (10.2.3) と (10.2.6) は, この粒子が, ラグランジアンに現れる場の粒子, すなわち素粒子の束縛状態であっても成立する. その場合は, 10.2 図のようなファインマン・ダイアグラム一つから極が出るのではなく, むしろ 10.3 図に示されているようなダイアグラムの無限和から生じる. これは, この章の方法が, 摂動論の各次の性質から導ける結果を超えた結果をもたらす最初の例だ.

さて, 証明に進もう. (10.2.1) の時刻 $x_1^0\cdots x_n^0$ の $n!$ 通りの可能な順序のうち, x_i^0 のうちの最初の r 個すべてが残りの $n-r$ より大きい場合は $r!(n-r)!$ 個ある. (10.2.1) の積分体積のうち, この部分の寄与のみを取り出すと,

$$G(q_1\cdots q_n)=\int d^4x_1\cdots d^4x_n\, e^{-iq_1\cdot x_1}\cdots e^{-iq_n\cdot x_n}$$
$$\times\theta\left(\min[x_1^0\cdots x_r^0]-\max[x_{r+1}^0\cdots x_n^0]\right)$$
$$\times\left(\Psi_0,\ T\Big\{A_1(x_1)\cdots A_r(x_r)\Big\}\,T\Big\{A_{r+1}(x_{r+1})\cdots A_n(x_n)\Big\}\Psi_0\right)$$

**10.2 図を見よ. $(2\pi)^{3/2}[2(\mathbf{k}^2+m^2)]^{1/2}$ の因子はちょうど $M_{0|\mathbf{k},\sigma}$ と $M_{\mathbf{k},\sigma|0}$ の質量 m の外線にともなう運動学的因子を取り除く役割をする. また, これらの二つの行列要素の係数関数の因子の積の σ についての和は, 10.2 図の内線にともなうプロパゲーターの分子を与える.

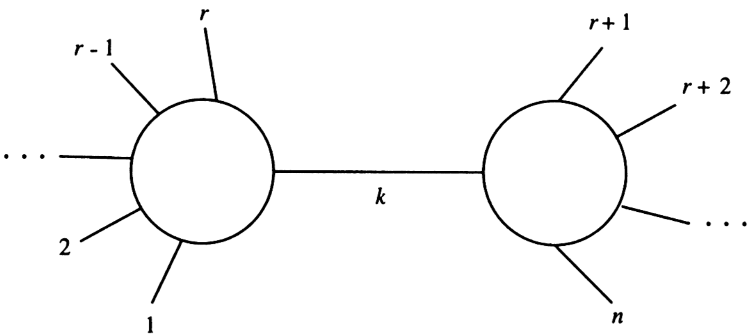


図 10.2: (10.2.6) の極の構造をもつファインマン・ダイアグラム. ここで, 運動量 k を持つ線はその場がラグランジアンに現れる素粒子を表す.

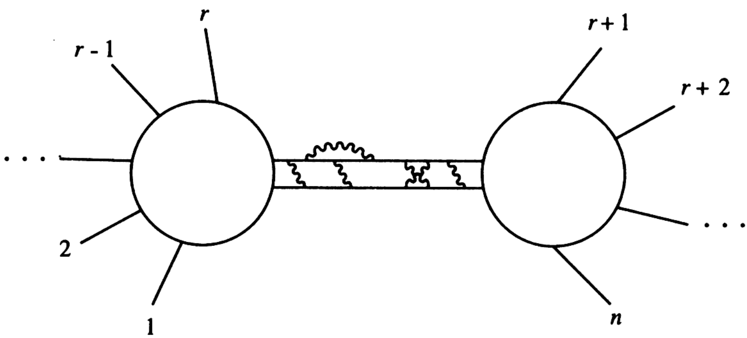


図 10.3: その和が (10.2.6) の極の構造をもつファインマン・ダイアグラム. ここで, 極はある複合粒子, つまり二つの素粒子の束縛状態による. 素粒子は直線で表し, その相互作用は, 波線で表した粒子の交換による.

$$+[\text{他項}]\,. \tag{10.2.7}$$

となる. ここで,「他項」は異なる時間順序を持つ他の項を意味する. この行列要素は, 時間順序積のなかに, 中間状態の完全系を挿入して計算できる. その中には, 質量 m の特定の種類の 1 粒子状態 $\Psi_{\mathbf{p},\sigma}$ もある. これらの 1 粒子中間状態の寄与を取り出して, 以下を得る.

$$G(q_1\cdots q_n) = \int d^4x_1\cdots d^4x_n\, e^{-iq_1\cdot x_1}\cdots e^{-iq_n\cdot x_n}$$

$$\begin{aligned}&\times\theta\left(\min[x_1^0\cdots x_r^0]-\max[x_{r+1}^0\cdots x_n^0]\right)\\&\times\sum_\sigma\int d^3p\left(\Psi_0,T\Big\{A_1(x_1)\cdots A_r(x_r)\Big\}\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\right)\\&\times\ \left(\Psi_{\mathbf{p},\sigma},T\Big\{A_{r+1}(x_{r+1})\cdots A_n(x_n)\Big\}\Psi_0\right)\\&+[\text{他項}].\end{aligned}\tag{10.2.8}$$

ここで,「他項」は他の時間順序のみならず他の中間状態の項も意味する. 積分変数を,

$$\begin{aligned}x_i&=x_1+y_i\ , && i=2,3,\cdots\ r\ ,\\x_i&=x_{r+1}+y_i\ , && i=r+2,\cdots\ n\end{aligned}$$

とずらし, 前の節の結果を使うと,

$$\begin{aligned}&\left(\Psi_0,T\Big\{A_1(x_1)\cdots A_r(x_r)\Big\}\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\right)\\&\qquad=e^{ip\cdot x_1}\left(\Psi_0,T\Big\{A_1(0)A_2(y_2)\cdots A_r(y_r)\Big\}\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\right)\ ,\end{aligned}\tag{10.2.9}$$

$$\begin{aligned}&\left(\Psi_{\mathbf{p},\sigma},T\Big\{A_{r+1}(x_{r+1})\cdots A_n(x_n)\Big\}\Psi_0\right)\\&\qquad=e^{-ip\cdot x_{r+1}}\left(\Psi_{\mathbf{p},\sigma},T\Big\{A_{r+1}(0)\cdots A_n(y_n)\Big\}\Psi_0\right)\end{aligned}\tag{10.2.10}$$

と書きかえれる. また, θ 関数の引数は,

$$\begin{aligned}&\min[x_1^0\cdots x_r^0]-\max[x_{r+1}^0\cdots x_n^0]\\&\qquad=x_1^0-x_{r+1}^0+\min[0\,y_2^0\cdots y_r^0]-\max[0\,y_{r+1}^0\cdots y_n^0]\end{aligned}$$

となる. また, 階段関数のフーリエ表現 (6.2.15),

$$\theta(\tau)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega\ e^{-i\omega\tau}}{\omega+i\epsilon}$$

を代入する. こうすると, x_1 と x_{r+1} の積分は単にデルタ関数となる.

$$G(q_1\cdots q_n)=\int d^4y_2\cdots d^4y_r\,d^4y_{r+2}\cdots d^4y_n$$

$$
\begin{aligned}
&\times e^{-iq_2\cdot y_2}\cdots e^{-iq_r\cdot y_r}e^{-iq_{r+2}\cdot y_{r+2}}\cdots e^{-iq_n\cdot y_n}\\
&\times -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega+i\epsilon}\exp\left(-i\omega\Big[\min[0\,y_2^0\cdots y_r^0]-\max[0\,y_{r+1}^0\cdots y_n^0]\Big]\right)\\
&\times\sum_\sigma\int d^3p\left(\Psi_0,\,T\Big\{A_1(0)\cdots A_r(y_r)\Big\}\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\times\left(\Psi_{\mathbf{p},\sigma},T\Big\{A_{r+1}(0)\cdots A_n(y_n)\Big\}\Psi_0\right)\\
&\times(2\pi)^4\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{q}_1-\cdots-\mathbf{q}_r)\,\delta(\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}+\omega-q_1^0-\cdots-q_r^0)\\
&\times(2\pi)^4\,\delta^3(\mathbf{q}_{r+1}+\cdots+\mathbf{q}_n+\mathbf{p})\\
&\quad\times\delta\left(q_{r+1}^0+\cdots+q_n^0+\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}+\omega\right)+[\text{他項}]\,. \qquad (10.2.11)
\end{aligned}
$$

ここでは, 分母 $\omega+i\epsilon$ がゼロとなるために起こる極だけに興味がある. このため, 因子 $\exp(-i\omega[\min-\max])$ を 1 としてよい. いまや, $\mathbf{p}$ と ω についての積分は共に自明であり, 以下の極を与える.

$$
\begin{aligned}
G(q_1\cdots q_n)\to\;& i(2\pi)^7\,\delta^4(q_1+\cdots+q_n)\left[q^0-\sqrt{\mathbf{q}^2+m^2}+i\epsilon\right]^{-1}\\
&\times\sum_\sigma M_{0|-\mathbf{q},\sigma}(q_2\cdots q_n)\,M_{\mathbf{q},\sigma|0}(q_{r+2}\cdots q_n)\;+\cdots\,.
\end{aligned}
\qquad (10.2.12)
$$

ここで, 以下の定義を用いた.

$$
q\equiv q_1+\cdots+q_r=-q_{r+1}-\cdots-q_n\,,
$$

$$
\begin{aligned}
M_{0|\mathbf{q},\sigma}(q_2\cdots q_r)\equiv&\int d^4y_2\cdots d^4y_r\,e^{-iq_2\cdot y_2}\cdots e^{-iq_r\cdot y_r}\\
&\times\left(\Psi_0,\;T\Big\{A_1(0)A_2(y_2)\cdots A_n(y_r)\Big\}\Psi_{\mathbf{q},\sigma}\right)\,, \qquad (10.2.13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{\mathbf{q},\sigma|0}(q_{r+2}\cdots q_n)\equiv&\int d^4y_{r+2}\cdots d^4y_n\,e^{iq_{r+2}\cdot y_{r+2}}\cdots\,e^{-iq_n\cdot y_n}\\
&\times\left(\Psi_{\mathbf{p},\sigma},\,T\Big\{A_{r+1}(0)A_{r+2}(y_{r+2})\cdots A_n(y_n)\Big\}\Psi_0\right)\,.
\end{aligned}
\qquad (10.2.14)
$$

(10.2.12) の末尾の「$\cdots$」はこの特定の極が出ない項を意味する. (他の 1 粒子状態から生じる「他項」は q の異なる場所に極を生じる. また, 多粒子状態から生じる項は q に分岐点を生じる. 異なる時間順序から生じる項は, 他の変数についての極や分岐点を生じる.) (10.2.9) と (10.2.10) を使うと, これらの M が (10.2.4) と (10.2.5) で定義されるものと同じであることが簡単にわかる. また, 極の近くでは,

$$\frac{1}{q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + i\epsilon} = \frac{-q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + i\epsilon}{-(q^0)^2 + (\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} - i\epsilon)^2}$$
$$\to \frac{-2\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}}{q^2 + m^2 - i\epsilon}$$

と書ける. (ここでまた, ϵ を正の因子 $2\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$ をかけたものと再定義した. これは, ϵ が任意の正の微小量を意味することから許される.) (10.2.12) は望んでいた結果 (10.2.3) と同じだ.

この結果は核力の理論に応用できる. これは伝統的な応用だ. $\Phi_a(x)$ をある実の場か場の組み合わせだとする. (たとえば, クォーク・反クォークの 2 次項 $\bar{q}\gamma_5\tau_a q$ に比例するものでもよい.) また, これは, アイソスピン a の 1 パイオン状態と真空との間の行列要素がゼロでないとする. また, 規格化は以下のようにされているとする.

$$\langle \mathrm{VAC}|\,\Phi_a(0)\,|\pi_b, \mathbf{p}\rangle = (2\pi)^{-3/2}(2p^0)^{-1/2}\delta_{ab}\,. \tag{10.2.15}$$

このとき, 運動量が p と p' の 1 核子状態間の Φ_a の行列要素は $(p-p')^2 \to -m_\pi^2$ で極を持ち, これはアイソスピンとローレンツ不変性 (空間反転不変性も含む) より, 次の形をとらなければならない.

$$\langle N', \sigma', \mathbf{p}'|\,\Phi_a(0)\,|N, \sigma, \mathbf{p}\,\rangle \to i(2\pi)^{-3}G_\pi \times \frac{\left(\bar{u}'\,\gamma_5\tau_a\,u\right)}{(p-p')^2 + m_\pi^2}\,. \tag{10.2.16}$$

ここで, u と u' はそれぞれ初期と終期の核子のスピノル係数関数であり, アイソスピン空間での核子の波動関数を含む. また, τ_a $(a = 1, 2, 3)$

はパウリの 2×2 アイソスピン行列だ.** 定数 G_π は**パイオン・核子結合定数** (pion–nucleon coupling constant) として知られている. この極は実際には, 行列要素 (10.2.16) の物理的領域, $(p-p')^2 \geq 0$ 上にはなく, この行列要素の解析接続で得られる. この解析接続には, たとえば, 次の質量殻外での行列要素を考えればよい.

$$\int d^4x\, d^4x'\, e^{-ip\cdot x} e^{ip'\cdot x'} \langle T\{\Phi_a(0)\, \bar{N}(x)\, N'(x')\}\rangle_{\text{VAC}}\,.$$

ここで, N と N' は 1 核子状態と真空の間にゼロでない行列要素を持つ場の演算子か場の演算子の積の適切な成分を意味する. 上で証明した定理によれば, 初期 4 元運動量 p_1, p_2 と終期 4 元運動量 p'_1, p'_2 を持つ 2 個の核子のパイオン 1 個の交換による散乱は, $(p_1-p'_1)^2 = (p_2-p'_2)^2 \to -m_\pi^2$ で以下のような極を持つ.

$$\begin{aligned} S_{N'_1 N'_2, N_1 N_2} &\to -i(2\pi)^4 \delta^4(p'_1+p'_2-p_1-p_2)\frac{G_\pi^2}{(p_1-p'_1)^2+m_\pi^2} \\ &\times (2\pi)^{-3}\Big(\bar{u}_{1'}\,\gamma_5 \tau_a\, u_1\Big) \times (2\pi)^{-3}\Big(\bar{u'_2}\,\gamma_5\tau_a\, u_2\Big)\,. \end{aligned} \tag{10.2.17}$$

(このような表式で位相と数因子を正しく得るには, ファインマン・ダイアグラムを使うことだ. 我々の定理によれば, 極の構造はパイオンを素粒子として含むラグランジアンを持つ場の理論の場合と同じだからだ.) また, 前と同じく, このパイオンの極は, 核子が質量殻上にあり, $(p_1-p'_1)^2 \geq 0$ が満たされている物理的領域内にはない. しかし, その極は S 行列の解析接続によって得られる. これは, たとえば, 以

**アイソスピンとローレンツ不変性から, この行列は $(\bar{u}'\,\Gamma\,\tau_a\, u)$ の形をとらなければならない. ここで, 4×4 行列 Γ は, 双 1 次項 $(\bar{\psi}'\,\Gamma\psi)$ が擬スカラーとして変換するように選ぶ. 全ての 4×4 行列がそうであるように, Γ はディラック行列 1, γ_μ, $[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$, $\gamma_5\gamma_\mu$, γ_5 に比例する項の和として展開できる. その比例係数はそれぞれ, 擬スカラー, 擬ベクトル, 擬テンソル, ベクトル, スカラーだ. 二つの運動量 p と p' を使って擬スカラーと擬ベクトルを作ることはできない. 作れるのは, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\rho p'_\sigma$ に比例する擬テンソル一つと, p_μ と p'_μ に比例するベクトルが合わせて二つ, それと, 1 に比例するスカラーだけだ. どの場合も, 比例因子はただ一つの独立なスカラー変数 $(p-p')^2$ のみにしか依れない. u と u' の運動量空間のディラック方程式を使って, Γ のテンソルと擬ベクトルの行列は γ_5 に比例することが示せる.

下の質量殻外の行列要素を考えればよい.

$$\int d^4x_1\, d^4x_2\, d^4x_1'\, d^4x_2'\, e^{-ip_1\cdot x_1} e^{-ip_2\cdot x_1} e^{ip_1'\cdot x_1} e^{ip_2'\cdot x_1} \times \langle T\{\bar{N}_1(x_1), \bar{N}_2(x_2), N_1'(x_1'), N_2'(x_2')\}\rangle_{\rm VAC}\,.$$

この極は核子・核子散乱の物理的領域には無いが, パイオンの質量が十分小さいために, この極は物理的領域の極めて近くに存在する. このため, ある種の状況, たとえば部分波展開で ℓ が大きいときなどでは, この極が散乱振幅を左右する.

座標空間で解釈すると, $(p_1 - p_1')^2 = (p_2 - p_2')^2 \to -m_\pi^2$ にあるこのような極は, $1/m_\pi$ の到達距離を持つ力があることを意味する. たとえば, 湯川のオリジナルな核力理論[2]では, 中間子 (これは, その時点では擬スカラーではなくスカラーと仮定された) の交換が $\exp(-m_\pi r)/4\pi r$ という形をしたポテンシャルを作り出した. これは, 第一ボルン近似では以下のフーリエ変換に比例する非相対論的核子散乱の S 行列を与える.

$$\int d^3x_1\, d^3x_2\, d^3x_1'\, d^3x_2'\, e^{-i\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{p}_1} e^{-i\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{p}_2} e^{i\mathbf{x}_1{}'\cdot\mathbf{p}_1{}'} e^{i\mathbf{x}_2{}'\cdot\mathbf{p}_2{}'} \times \frac{\exp\Big(-m_\pi|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|\Big)}{4\pi|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}\delta^3(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_1{}')\delta^3(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_1{}') = -(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1{}'-\mathbf{p}_2{}')\frac{1}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_1{}')^2+m^2}\,.$$

$1/[(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1{}')^2 + m^2]$ の因子はちょうど (10.2.17) のプロパゲーター $1/[(p_1-p_1')^2+m_\pi^2]$ の非相対論的極限であり, ((10.2.17) で, エネルギー移動 $p_1^0-p_1'^0$ は, $|\mathbf{p}_1| \ll m_N$ と $|\mathbf{p}_1'| \ll m_N$ のときには $[\mathbf{p}_1^2-\mathbf{p}'^2_1]/2m_N$ に等しく, これは, 運動量移動の大きさ $|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1'|$ に比べて無視できる.) 湯川の理論が最初に提案されたときには, この種の運動量依存性は理論に中間子の場が現れることによると考えられた. 1950 年代になって初めて, $(p_1 - p_1')^2 \to -m_\pi^2$ での極の存在は, パイオンが粒子と

して存在することによるのであって, ラグランジアンにその場が現れる素粒子であるかどうかとは無関係だと広く理解されるようになった.

10.3 場と質量のくりこみ

ここで, 前の節の結果の特別な場合を用いて, 一般の過程での内線と外線の輻射補正の扱いを明らかにする.

ここで扱う特別な場合とは, 1 本の外線の 4 元運動量が質量殻に近づく場合だ. (前の節の記法を使うと, これは $r=1$ とすることを意味する.) 以下の関数を考える.

$$G_\ell(q_1 q_2 \cdots) = \int d^4x_1\, d^4x_2 \cdots\ e^{-iq_1\cdot x_1}\ e^{-iq_2\cdot x_2} \cdots \times \Big(\Psi_0,\, T\Big\{\mathcal{O}_\ell(x_1),\ A_2(x_2), \cdots\Big\}\Psi_0\Big)\ . \tag{10.3.1}$$

ここで, $\mathcal{O}_\ell(x)$ はハイゼンベルグ表示の演算子で, ローレンツ変換性はその添字 ℓ で決まっている. つまり, この演算子は斉次ローレンツ群 (または, パリティを保存する理論では, 空間の反転も含んだローレンツ群) のある規約表現に属するある自由場 ψ_ℓ と同じローレンツ変換性を持つ. また, A_2, A_3 等は任意のハイゼンベルグ表示の演算子だ. いま, 状態 $\mathcal{O}_\ell^\dagger\Psi_0$ および $A_2A_3\cdots\Psi_0$ との行列要素がゼロでないある 1 粒子状態 $\Psi_{\mathbf{q}_1,\sigma}$ が存在するとする. このとき, 前の節で証明した定理により, G_ℓ は $q_1^2=-m^2$ で極を持ち, 以下のように振舞う.

$$G_\ell(q_1 q_2 \cdots) \to \frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}_1{}^2+m^2}}{q_1^2+m^2-i\epsilon}\,(2\pi)^3 \sum_\sigma \Big(\Psi_0, \mathcal{O}_\ell(0)\Psi_{\mathbf{q}_1,\sigma}\Big) \times \int d^4x_2 \cdots e^{-iq_2\cdot x_2}\cdots \Big(\Psi_{\mathbf{q}_1,\sigma}\, T\Big\{A_2(x_2)\cdots\Big\}\Psi_0\Big)\ . \tag{10.3.2}$$

ローレンツ不変性を使って,

$$\Big(\Psi_0, \mathcal{O}_\ell(0)\Psi_{\mathbf{q}_1,\sigma}\Big) = (2\pi)^{-3/2}\, N\, u_\ell(\mathbf{q}_1, \sigma) \tag{10.3.3}$$

と書ける. ここで, $u_\ell(\mathbf{q},\sigma)$ は $((2\pi)^{-3/2}$ の因子を除いて) $\mathcal{O}_\ell$ と同じローレンツ不変性を持つ自由場 ψ_ℓ に現れる係数関数だ.* また, N はある定数だ. ((10.3.3) が未定定数をただ一つ, N しか持たないようにするために, $\mathcal{O}_\ell$ が既約的に変換することを仮定する必要があった.) また,「切り縮めた」行列要素 M_ℓ を以下で定義する.

$$\int d^4x_2 \cdots e^{-iq_2\cdot x_2}\cdots\Big(\Psi_{\mathbf{q}_1,\sigma}\,T\Big\{A_2(x_2)\cdots\Big\}\Psi_0\Big)$$
$$\equiv N^{-1}(2\pi)^{-3/2}\sum_\ell u^*_\ell(\mathbf{q}_1,\sigma)\,M_\ell(q_2\cdots)\,. \qquad (10.3.4)$$

こうすると, (10.3.2) は, $q^2 \to -m_1^2$ のときに,

$$G_\ell \to \frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}_1{}^2+m^2}}{q_1^2+m^2-i\epsilon}\sum_{\sigma,\ell'} u_\ell(\mathbf{q}_1,\sigma)u^*_{\ell'}(\mathbf{q}_1,\sigma)M_{\ell'} \qquad (10.3.5)$$

となる. (6.2.2) と (6.2.18) によれば, (10.3.5) で $M_{\ell'}$ にかかる量は, $\mathcal{O}_\ell$ と同じローレンツ変換性を持つ自由場の運動量空間での行列プロパゲーター $-i\Delta_{\ell\ell'}(q_1)$ に等しい. (もしくは, 少なくともその $q_1^2 \to -m^2$ の極限と同じ振舞いをする.) したがって, (10.3.5) によれば, M_ℓ は $\mathcal{O}_\ell, A_2, \cdots$ に相当する外線が運動量 q_1, $q_2\cdots$ を持つが, $\mathcal{O}_\ell$ のプロパゲーターが取り除かれたダイアグラム全ての和に等しい. したがって, (10.3.4) は, 通常のファインマン・ダイアグラムの和で粒子の放出の行列要素を計算するための通常の処方箋にすぎない. つまり, 粒子のプロパゲーターを取り除き, 外線の因子 $(2\pi)^{-3/2}u^*_\ell$ をかけるわけだ. 通常のファインマン則と異なるのは, N の因子だけだ.

上の定理は, レーマン・ジマンチック・ツィンマーマン (Lehmann, Symanzik, Zimmerman)[3] による有名な**還元公式** (reduction formula) だ. ここでは, この結果を一般のスピンに適用できるように多少異なる方法で証明した. この結果の一つ重要な点は, どんな演算子につい

*たとえば, 通常のように規格化された自由なスカラー場では, $u_\ell(\mathbf{q}_1,\sigma) = [2\sqrt{\mathbf{q}_1^2+m^2}]^{-1/2}$ となっている.

ても成り立つということだ. つまり, $\mathcal{O}_\ell$ はラグランジアンに現れる場である必要はない. また, それが作る粒子は, ラグランジアンに現れる粒子の束縛状態であってもよい. $\mathcal{O}_\ell$ がラグランジアンの場 Ψ_ℓ である場合には, 大事なことが学べる. もし, S 行列要素を計算するのに通常のファインマン則を使うと, 最初に場の規格化因子を $1/N$ の分だけ再定義しなければならない. こうすれば, (記号 Ψ を重複して使って申し訳ないが),

$$\Big(\Psi_0, \Psi_\ell(0)\Psi_{\mathbf{q},\sigma}\Big) = (2\pi)^{-3/2}\, u_\ell(\mathbf{q},\sigma) \tag{10.3.6}$$

となる. (10.3.6) のように規格化された場は**くりこまれた場** (renormalized field) と呼ばれる.

場のくりこみ定数 N は他の場所にも現れる. いま, (10.3.1) の演算子 $A_2, A_3, \cdots$ が一つしかなく, それが $\mathcal{O}_\ell$ と同じ場の多重項の成分の共役だとしよう. このとき, (10.3.2) は以下のようになる.

$$\begin{aligned}
&\int d^4x_1 \int d^4x_2\, e^{-iq_1\cdot x_1}\, e^{-iq_2\cdot x_2}\Big(\Psi_0,\, T\Big\{\mathcal{O}_\ell(x_1)\mathcal{O}^\dagger_{\ell'}(x_2)\Big\}\Psi_0\Big) \\
&\overset{q_1^2\to -m^2}{\longrightarrow}\; \frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}_1{}^2+m^2}\,(2\pi)^3}{q_1^2+m^2-i\epsilon}\sum_\sigma\Big(\Psi_0, \mathcal{O}_\ell(0)\Psi_{\mathbf{q}_1,\sigma}\Big) \\
&\qquad\times\int d^4x_2\, e^{-iq_2\cdot x_2}e^{-iq_1\cdot x_2}\Big(\Psi_{\mathbf{q}_1,\sigma}, \mathcal{O}^\dagger_{\ell'}(0)\Psi_0\Big) \\
&= \frac{-2i|N|^2\sqrt{\mathbf{q}_1{}^2+m^2}}{q_1^2+m^2-i\epsilon}\sum_\sigma u_\ell(\mathbf{q}_1,\sigma)\,u^*_{\ell'}(\mathbf{q}_1,\sigma)\,(2\pi)^4\,\delta^4(q_1+q_2)\,.
\end{aligned}$$

これは, $|N|^2$ の因子を除いては, プロパゲーター (外線が2本のダイアグラムの和) の極の近くの振舞いだ. (10.3.6) によれば, この因子はくりこまれた場 Ψ_ℓ にはない. したがって, くりこまれた場はそのプロパゲーターが極の近傍で自由場と同じように振舞う場であり, そのくりこまれた質量は極の位置で決まる.

これが実際にどのように働くかをみるために, 自己相互作用をする実スカラー場 Φ_B を考える. この添字 B はここで, これが「裸の」(つ

まり, くりこまれていない) 場を意味することを忘れないようにするためだ. ラグランジアン密度は通常のように,

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\, \partial_\mu \Phi_{\rm B} \partial^\mu \Phi_{\rm B} - \tfrac{1}{2}\, m_{\rm B}^2 \Phi_{\rm B}^2 - V_{\rm B}(\Phi_{\rm B}) \tag{10.3.7}$$

ととる. 一般に, 場 $\Phi_{\rm B}$ が (10.3.6) の条件を満たすと期待する理由はないし, また, q^2 の極が $-m_{\rm B}^2$ にあるとも考えられない. したがって, くりこまれた場とくりこまれた質量を以下で定義する.

$$\Phi \equiv Z^{-1/2} \Phi_{\rm B} \ , \tag{10.3.8}$$

$$m^2 \equiv m_{\rm B}^2 + \delta m^2 \ . \tag{10.3.9}$$

ここで, Z は Φ が (10.3.6) を満たすように選ばれ, δm^2 はプロパゲーターの極が $q^2 = -m^2$ にあるように選ばれている. (この問題で記号 Z を使うのは一般的になっている. ラグランジアンに現れる場それぞれについて異なる Z がある.) このとき, (10.3.7) のラグランジアン密度は, 以下のように書きかえれる.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \ , \tag{10.3.10}$$

$$\mathcal{L}_0 = -\tfrac{1}{2}\, \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \tfrac{1}{2}\, m^2 \Phi^2 \ , \tag{10.3.11}$$

$$\mathcal{L}_1 = -\tfrac{1}{2}\, (Z-1)[\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi^2] + \tfrac{1}{2}\, Z \delta m^2 \Phi^2 - V(\Phi) \ . \tag{10.3.12}$$

ここで,

$$V(\Phi) \equiv V_{\rm B}(\sqrt{Z}\Phi)$$

としている. くりこまれたスカラー場の運動量空間での完全なプロパゲーターの補正は通常 $\Delta'(q)$ と書くが, これを計算するには, **1 粒子既約** (one-particle-irreducible) のダイアグラム, つまり, (一本のスカラーの線からできているダイアグラムを除いて) どのスカラーの内線を切っても非連結にならない連結ダイアグラムを別々に考えると便利

(a)

(b)

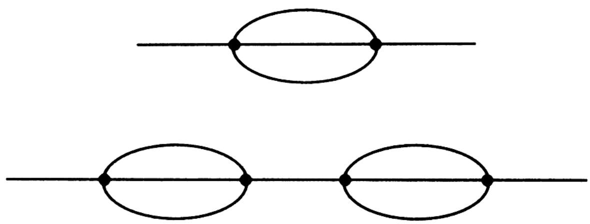


図 10.4: (a) 1 粒子既約のダイアグラムと (b) 1 粒子既約でないダイアグラム. これらのダイアグラムはある種の 3 次の相互作用を持つ理論について描かれている. たとえば, スカラー場 ϕ が ϕ^4 に比例する相互作用を持つ場合がこれにあてはまる.

だ. 1 例を 10.4 図に示す. このようなダイアグラムの全ての和を, 2 本の外線のプロパゲーターの因子 $-i(2\pi)^{-4}(q^2+m^2-i\epsilon)^{-1}$ を取り除いて, $i(2\pi)^4\Pi^*(q^2)$ と書くのが普通だ. ここで, アステリスク (*) はこれが 1 粒子既約ダイアグラムであることを意味する. こうすると, 完全なプロパゲーターへの補正は, 以下のように, 1, 2, またはそれより多くの数の 1 粒子既約の部分ダイアグラムが通常の補正されていないプロパゲーター因子でつながれている鎖の和で与えられる.

$$\begin{aligned}\frac{-i}{(2\pi)^4}\Delta'(q) &= \frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2-i\epsilon}\\ &+\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2-i\epsilon}\right]\left[i(2\pi)^4\Pi^*(q^2)\right]\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2-i\epsilon}\right]\\ &+\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2-i\epsilon}\right]\left[i(2\pi)^4\Pi^*(q^2)\right]\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2-i\epsilon}\right]\\ &\times\left[i(2\pi)^4\Pi^*(q^2)\right]\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2-i\epsilon}\right]+\cdots. \qquad (10.3.13)\end{aligned}$$

これを簡単化すると,

$$\Delta'(q) = [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} + [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1}\Pi^*(q^2)[q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1}$$
$$+[q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1}\Pi^*(q^2)[q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1}$$
$$\times\Pi^*(q^2)[q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} + \cdots \tag{10.3.14}$$

となる. この幾何級数の和をとると,

$$\Delta'(q) = \left[q^2 + m^2 - \Pi^*(q^2) - i\epsilon\right]^{-1} \tag{10.3.15}$$

を得る. Π^* を計算する際には, (10.3.12) の $\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi$ と Φ^2 に比例する項に対応する頂点を一つ挿入した樹木ダイアグラムに加えて, 10.4(a) 図のようなループ・ダイアグラムから生じる $\Pi^*_{\rm LOOP}$ の項が得られる.

$$\Pi^*(q^2) = -(Z-1)[q^2 + m^2] + Z\delta m^2 + \Pi^*_{\rm LOOP}(q^2)\,. \tag{10.3.16}$$

m^2 が粒子の真の質量だという条件は, プロパゲーターの極が $q^2 = -m^2$ にあることだから,

$$\Pi^*(-m^2) = 0 \tag{10.3.17}$$

が満たされていなければならない. また, プロパゲーターの $q^2 = -m^2$ の極の留数が 1 である条件は,

$$\left[\frac{d}{dq^2}\Pi^*(q^2)\right]_{q^2=-m^2} = 0 \tag{10.3.18}$$

となる. これらの条件を使うと, Z と δm^2 が以下のように決定される.

$$Z\,\delta m^2 = -\Pi^*_{\rm LOOP}(-m^2)\,, \tag{10.3.19}$$
$$Z = 1 + \left[\frac{d}{dq^2}\Pi^*_{\rm LOOP}(q^2)\right]_{q^2=-m^2}\,. \tag{10.3.20}$$

これはまた, $Z\delta m^2$ と $Z-1$ が結合定数を 1 次以上含む項の級数で与えられ, (10.3.12) の最初の 2 項を相互作用 $\mathcal{L}_1$ の一部として取り扱ったのが正しかったことがわかる.

実際の計算では, ループ項 $\Pi^*_{\rm LOOP}(q^2)$ から, (10.3.17) と (10.3.18) が満たされるように q^2 についての 1 次の多項式を引くというのが一番簡単だ. 後で見るように, この引き算は, $\Pi^*_{\rm LOOP}$ の運動量空間積分から起こる無限大をも引きさる. しかし, この議論から明らかなように, 質量と場のくりこみは無限大の存在とは直接の関係はない. 運動量空間積分がすべて収束するような理論でも, これらのくりこみは必要だ.

(10.3.17) と (10.3.18) の重要な帰結は, 質量殻上にある外線の輻射補正は含める必要がないということだ. つまり,

$$\Big[\Pi^*(q^2)[q^2+m^2-i\epsilon]^{-1} + \Pi^*(q^2)[q^2+m^2-i\epsilon]^{-1}\Pi^*(q^2)[q^2+m^2-i\epsilon]^{-1} + \cdots\Big]_{q^2\to -m^2} = 0 \tag{10.3.21}$$

となる.

同様のことは任意のスピンの粒子にあてはまる. たとえば, 「裸の」ディラック場について, ラグランジアンは,

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}_{\rm B}[\partial\!\!\!/ + m_{\rm B}]\Psi_{\rm B} - V_{\rm B}(\Psi_{\rm B}) \tag{10.3.22}$$

だ. くりこまれた場と質量を,

$$\Psi \equiv Z_2^{-1/2}\Psi_{\rm B}\ , \tag{10.3.23}$$

$$m = m_{\rm B} + \delta m \tag{10.3.24}$$

で導入する. (Z_2 の添字 2 は通常フェルミオン場のくりこみ定数を区別するのに使われる.) このとき, ラグランジアン密度は, 以下のように書かれる.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1\ , \tag{10.3.25}$$

$$\mathcal{L}_0 = -\bar{\Psi}[\partial\!\!\!/ + m]\Psi\ , \tag{10.3.26}$$

$$\mathcal{L}_1 = -(Z_2-1)[\bar{\Psi}[\partial\!\!\!/ + m]\Psi] + Z_2\delta m\bar{\Psi}\Psi - V_{\mathrm{B}}(Z_2\bar{\Psi}\Psi)\,. \qquad (10.3.27)$$

フェルミオンが4元運動量 k を持って入射し, 同じ4元運動量で出て行く連結ダイアグラムのうち, どのフェルミオンの内線を1本切っても非連結とならないものの総和を $i(2\pi)^4\Sigma^*(k\!\!\!/)$ とする. ただし, 外線のプロパゲーター因子 $-i(2\pi)^{-4}$ と $[i\,k\!\!\!/ + m - i\epsilon]^{-1}$ は除かれている. (ローレンツ不変性を使って, Σ^* をローレンツ・スカラーの行列, $k\!\!\!/ \equiv k_\mu\gamma^\mu$ の通常の関数と書いている.) このとき, 完全なフェルミオン・プロパゲーターは,

$$\begin{aligned} S'(k) &= [i\,k\!\!\!/ + m - i\epsilon]^{-1} + [i\,k\!\!\!/ + m - i\epsilon]^{-1}\Sigma^*(k\!\!\!/)[i\,k\!\!\!/ + m - i\epsilon]^{-1} \\ &\quad + [i\,k\!\!\!/ + m - i\epsilon]^{-1}\Sigma^*(k\!\!\!/)[i\,k\!\!\!/ + m - i\epsilon]^{-1} \\ &\qquad \times \Sigma^*(k\!\!\!/)[i\,k\!\!\!/ + m - i\epsilon]^{-1} + \cdots \\ &= [i\,k\!\!\!/ + m - \Sigma^*(k\!\!\!/) - i\epsilon]^{-1} \end{aligned} \qquad (10.3.28)$$

となる. $\Sigma^*(k\!\!\!/)$ を計算するときは, (10.3.27) の $\bar{\Psi}\,\partial\!\!\!/\Psi$ と $\bar{\Psi}\Psi$ に比例する項, それと, ループの寄与を取り入れ,

$$\Sigma^*(k\!\!\!/) = -(Z_2-1)[i\,k\!\!\!/ + m] + Z_2\delta m + \Sigma^*_{\mathrm{LOOP}}(k\!\!\!/) \qquad (10.3.29)$$

となる. 完全なプロパゲーターが, $k^2=-m^2$ に極を持ち, その留数が補正の無いプロパゲーターと同じである条件は, 以下のようになる.

$$\Sigma^*(im) = 0\,, \qquad (10.3.30)$$

$$\left.\frac{\partial\Sigma^*(k\!\!\!/)}{\partial\,k\!\!\!/}\right|_{k\!\!\!/=im} = 0\,. \qquad (10.3.31)$$

したがって,

$$Z_2\delta m = -\Sigma^*_{\mathrm{LOOP}}(im)\,, \qquad (10.3.32)$$

$$Z_2 = 1 - i\left.\frac{\partial\Sigma^*_{\mathrm{LOOP}}(k\!\!\!/)}{\partial\,k\!\!\!/}\right|_{k\!\!\!/=im} \qquad (10.3.33)$$

となる. スカラーのときと同様に, $[i\not{k}+m]^{-1}\Sigma^*(\not{k})$ が $\not{k}\to im$ の極限でゼロとなることから, 外線については輻射補正が無視できることがわかる. 光子についての対応する結果は, 10.5 節で導く.

10.4　くりこまれた電荷とワード恒等式

ハイゼンベルグ表示の演算子の交換関係と保存則を使うと, ラグランジアン密度の電荷 (および, 他の同様な量) と物理的状態の性質を関係付けることができる. ラグランジアン密度が大域的ゲージ変換 $\Psi_\ell \to \exp(iq_\ell\alpha)\Psi_\ell$ (α は任意の定数位相) のもとで不変なら, カレント,

$$J^\mu = -i\sum_\ell \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi_\ell)}\, q_\ell\,\Psi_\ell \tag{10.4.1}$$

が保存則,

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{10.4.2}$$

を満たすことを思い起こそう. これより, J^μ の時間成分の空間積分が時間に依存しないといえる. つまり,

$$i\,\frac{d}{dt}\,Q = [Q, H] = 0 \tag{10.4.3}$$

が,

$$Q \equiv \int d^3x\; J^0 \tag{10.4.4}$$

によって満たされている. (これには非常に重要な例外がある. 系に質量ゼロのスカラー粒子があり長距離力が存在すれば, (10.4.4) の積分は存在しない場合がある. この点については, 3 巻で対称性の破れを考えるときに考察する.) また, これは空間積分なので, Q は,

$$[\mathbf{P}, Q] = 0 \tag{10.4.5}$$

と, 明らかに並進不変だ. また, J^μ は 4 元ベクトルなので, Q は斉次ローレンツ変換のもとで不変だ.

$$[J^{\mu\nu}, Q] = 0 \,. \tag{10.4.6}$$

これにより, Q が真の真空 Ψ_0 に作用すると, 別のローレンツ不変でエネルギーと運動量がゼロの状態ができることになる. (真空が縮退していないと仮定すると) この状態は, Ψ_0 自身に比例していなければならない. しかし, ローレンツ不変性から $(\Psi_0, J_\mu \Psi_0)$ はゼロでなければならないから, この比例定数はゼロでなければならない. したがって,

$$Q\,\Psi_0 = 0 \tag{10.4.7}$$

となる. また, Q が任意の 1 粒子状態 $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}$ に作用すると, 同じエネルギー, 運動量, ローレンツ変換性の別の状態ができるが, (1 粒子状態が縮退していないとすると) この状態は, 同じ 1 粒子状態に比例しなければならない.

$$Q\,\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = q_{(n)}\,\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} \,. \tag{10.4.8}$$

Q のローレンツ不変性は, 固有値 $q_{(n)}$ が $\mathbf{p}$ と σ から独立であり, 粒子の種類のみに依ることを保証する. この固有値は, その 1 粒子状態の電荷 (または, J^μ がカレントになっている量子数) と呼ばれる. これをラグランジアンのパラメータ q_ℓ と関係付けるには, 正準交換関係より,

$$\Big[J^0(\mathbf{x},t),\ \Psi_\ell(\mathbf{y},t)\Big] = -q_\ell \Psi_\ell(\mathbf{y},t)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{10.4.9}$$

が得られ, これは $\mathbf{x}$ について積分すると,

$$\Big[Q, \Psi_\ell(y)\Big] = -q_\ell \Psi_\ell(y) \tag{10.4.10}$$

であることを使う. これはまた, 場, 場の微分, その共役をそれぞれ一定数だけ含む任意の局所関数 $F(y)$ についても成り立つ.

$$\Big[Q, F(y)\Big] = -q_F F(y) \,. \tag{10.4.11}$$

ここで, q_F は $F(y)$ の場と場の微分の q_ℓ の総和から, 場の共役と場の共役の微分の q_ℓ の総和をひいたものだ. 1 粒子状態と真空の間でこの式の行列要素をとり, (10.4.7) と (10.4.8) を使うと,

$$\left(\Psi_0,\, F(y)\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}\right)\left(q_F - q_{(n)}\right) = 0 \tag{10.4.12}$$

を得る. したがって,

$$q_{(n)} = q_F \tag{10.4.13}$$

が,

$$\left(\Psi_0,\, F(y)\,\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}\right) \neq 0 \tag{10.4.14}$$

であるかぎり成立しなければならない. 前の節でみたように, (10.4.14) は F を含む運動量空間のグリーン関数が 1 粒子状態 $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}$ に対応する極を持っていることを保証する条件だ. ラグランジアンに現れる場の一つに相当する 1 粒子状態については, $F = \Psi_\ell$ とすることができて, このときは $q_F = q_\ell$ となっている. しかし, 我々の結果は一般的な 1 粒子状態について成立するもので, その場がラグランジアンに現れるかどうかには依らない.

これは, 荷電粒子からの光子の吸収と放出に影響する高次のダイアグラムが多数あるにもかかわらず, 物理的な電荷はラグランジアンに現れるパラメータ q_ℓ (かまたは q_F のようにそれらの和) であることを, 完全にではないがほとんど意味している. ここに加えなければならない制限とは, ラグランジアンが $\Psi_\ell \to \exp(iq_\ell\alpha)\Psi_\ell$ のもとで不変だという要求からは, 量 q_ℓ に共通の大きさが決まらないことだ. 物理的な電荷は, 与えられたくりこまれた電磁場 A^μ のもとでの物質場の反応を決めるものだ. つまり, q_ℓ の大きさは, くりこまれた電磁場が物質場のラグランジアン $\mathcal{L}_M$ に線形結合 $[\partial_\mu - iq_\ell A_\mu]\Psi_\ell$ で現われ, カレント J^μ が以下で与えられることによって決められている.

$$J^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta A_\mu}\,. \tag{10.4.15}$$

しかし, A^μ と q_ℓ は, ラグランジアンを一番簡単に,

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}\left(\partial_\mu A_{B\nu} - \partial_\nu A_{B\mu}\right)(\partial^\mu A_{\mathrm{B}}^\nu - \partial^\nu A_{\mathrm{B}}^\mu) + \mathcal{L}_M\left(\Psi_\ell, [\partial_\mu - iq_{B\ell}A_{B\mu}]\Psi_\ell\right) \tag{10.4.16}$$

と書いたときに現れる「裸の電磁場」A_{B}^μ や「裸の電荷」$q_{\mathrm{B}\ell}$ と同じではない. くりこまれた電磁場 (これは完全なプロパゲーターが $p^2 = 0$ で留数 1 の極を持つように定義されている) は, 通常, A_{B}^μ を使って以下のように書かれる.

$$A^\mu = Z_3^{-1/2} A_{\mathrm{B}}^\mu\,. \tag{10.4.17}$$

したがって, 電荷 q_ℓ が, 与えられた電磁場への荷電粒子の反応を特徴付けるためには, くりこまれた電荷を,

$$q_\ell = \sqrt{Z_3}\, q_{\mathrm{B}\ell} \tag{10.4.18}$$

で定義しなければならない.

任意の粒子の物理的電荷 q が, ラグランジアンに現れるパラメータに関係した q_{B} に比例し, 比例定数が $Z_3^{-1/2}$ と全ての粒子に対して同じだとわかった. これは, 仮想的な中間子や他の強い相互作用をする粒子の雲に覆われた陽子のような粒子が, なぜ, それに比べて相互作用が非常に弱い陽電子と同じ電荷を持つのかを理解する助けになる. つまり, ラグランジアンの電荷 $q_{\mathrm{B}\ell}$ は電子と, 陽子を作る粒子 (2 個の u クォークと 1 個の d クォーク) とで絶対値が同じで反対符号であると仮定するだけでよい. 高次効果は共通の因子 $Z_3^{-1/2}$ のみに現れる.

電荷のくりこみが光子のプロパゲーターの輻射補正からのみ生じるためには, 荷電粒子のプロパゲーターと電磁相互作用の頂点とへの他の非常に多彩な輻射補正の間に打消しが起こらなければならない. これらの荷電粒子のプロパゲーターと頂点の間の名高い関係式, すなわち**ワード恒等式** (Ward identity) を使うと, この打消しの性質をより深く調べることができる.

例として, 電流 $J^\mu(x)$ と電荷 q のハイゼンベルグ表示のディラック場 $\Psi_n(y)$ とその共役場 $\bar{\Psi}_m(z)$ のグリーン関数を考える. 荷電粒子の電磁頂点関数 Γ^μ を以下で定義する.

$$\int d^4x\, d^4y\, d^4z\, e^{-ip\cdot x} e^{-ik\cdot y} e^{+i\ell\cdot z} \Big(\Psi_0,\, T\Big\{J^\mu(x)\, \Psi_n(y)\, \bar{\Psi}_m(z)\Big\}\Psi_0\Big)$$
$$\equiv -\, iqS'_{nn'}(k)\Gamma^\mu_{n'm'}(k,\ell)S'_{m'm}(\ell)\,\delta^4(p+k-\ell)\,. \tag{10.4.19}$$

ここで,

$$-\, iS'_{nm}(k)\,\delta^4(k-\ell) \equiv \int d^4y\, d^4z\, \Big(\Psi_0,\, T\Big\{\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\Big\}\Psi_0\Big) \times e^{-ik\cdot y} e^{+i\ell\cdot z} \tag{10.4.20}$$

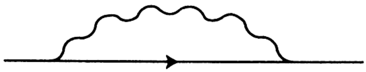
とした. 6.4 節の定理によれば, (10.4.20) はフェルミオンの線が 1 本入り, 1 本出ていくファインマン・ダイアグラムの総和, つまり, 完全なディラック・プロパゲーターを与える. また, (10.4.19) は, それに余分に光子の線が 1 本付いたダイアグラムの総和を与える. したがって, Γ^μ は, ディラックの線が 1 本入り, 1 本出ていき, 光子が 1 本あるダイアグラムからディラックの完全な外線と光子の裸の外線のプロパゲーターを取り除いた「頂点」ダイアグラムの和だ. S' と Γ^μ のくりこみを完全に明らかにするために, 相互作用が無い極限ではこれらの関数は,

$$S'(k) \to [i\gamma_\lambda k^\lambda + m - i\epsilon]^{-1}\,, \quad \Gamma^\mu(k,\ell) \to \gamma^\mu$$

という値をとることに注意する. これらの値に補正を加える 1 ループ・ダイアグラムは 10.5 図のものだ.

Γ^μ と S' の関係を以下の関係式を使って導くことができる.

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T\Big\{J^\mu(x)\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\Big\} = T\Big\{\partial_\mu J^\mu(x)\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\Big\}$$
$$+\,\delta(x^0-y^0)\,T\Big\{\Big[J^0(x), \Psi_n(y)\Big]\,\bar{\Psi}_m(z)\Big\}$$
$$+\,\delta(x^0-z^0)\,T\Big\{\Psi_n(y)\,\Big[J^0(x), \bar{\Psi}_m(z)\Big]\Big\}\,. \tag{10.4.21}$$



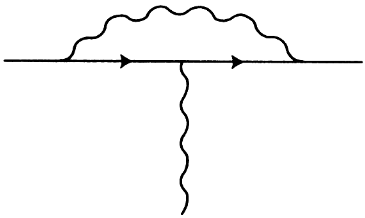


図 10.5: 量子電磁理論での電子のプロパゲーターと頂点関数への最初の補正ダイアグラム. ここで, 直線は電子, 波線は光子を表す.

ここで, デルタ関数は階段関数の時間微分から出てくる. (10.4.2) の保存則によれば, 最初の項はゼロとなり, 第 2 項と第 3 項は (10.4.9) の交換関係, つまり,

$$\Big[J^0(\mathbf{x},t),\ \Psi_n(\mathbf{y},t)\Big] = -q\Psi_n(\mathbf{y},t)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{10.4.22}$$

とその共役,

$$\Big[J^0(\mathbf{x},t),\ \bar{\Psi}_n(\mathbf{y},t)\Big] = q\bar{\Psi}_n(\mathbf{y},t)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{10.4.23}$$

を使って計算できる. その結果, (10.4.21) は,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,T\Big\{J^\mu(x)\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\Big\} &= -q\,\delta^4(x-y)\,T\Big\{\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\Big\}\\ &\quad + q\,\delta^4(x-z)\,T\Big\{\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\Big\}\end{aligned} \tag{10.4.24}$$

となる. これを (10.4.19) のフーリエ変換に代入すると以下を得る.

$$(\ell-k)_\mu\,S'(k)\,\Gamma^\mu(k,\ell)\,S'(\ell) = i\,S'(\ell)\ -\ i\,S'(k)\,.$$

これは, 書き換えると,

$$(\ell - k)_\mu \Gamma^\mu(k,\ell) = i\, S'^{-1}(k) - iS'^{-1}(\ell) \tag{10.4.25}$$

となる. これは, 最初に高橋[4]によって (この方法で) 導かれ, **一般ワード恒等式** (generalized Ward identity) と呼ばれている. 元のワード恒等式は, それ以前にワードによってそれ以前に摂動論の研究から導かれていて, (10.4.25) で ℓ を k に近づけて得られる. この極限をとると, (10.4.25) は,

$$\Gamma^\mu(k,k) = -i\,\frac{\partial}{\partial k_\mu}\, S'^{-1}(k) \tag{10.4.26}$$

を与える. フェルミオン・プロパゲーターは, (10.3.28) により, 自己エネルギー部分 $\Sigma^*(\not k)$ と

$$S'^{-1}(k) = i\not k + m - \Sigma^*(\not k)\,,$$

という関係にあるから, (10.4.26) は以下のようにも書ける.

$$\Gamma^\mu(k,k) = \gamma^\mu + i\,\frac{\partial}{\partial k_\mu}\,\Sigma^*(\not k)\,. \tag{10.4.27}$$

くりこまれたディラック場については, (10.3.31) と (10.4.27) から, 質量殻上で,

$$\bar{u}'_k\,\Gamma^\mu(k,k)\,u_k = \bar{u'}_k\,\gamma^\mu\,u_k \tag{10.4.28}$$

となることがわかる. ここで, $[i\gamma_\mu k^\mu + m]u_k = [i\gamma_\mu k^\mu + m]u'_k = 0$ となっている. したがって, フェルミオン場のくりこみは, 頂点関数 Γ_μ への輻射補正が, 質量殻上のフェルミオンが電磁場と移行運動量がゼロで相互作用するときにゼロとなることを保証する. これはまさに, フェルミオンの電荷を測定する場合に相当する. くりこんだフェルミオン場を使わなかったら, 頂点関数への補正はフェルミオンの外線への輻射補正を消して, 電荷はやはり変わらない.

10.5 ゲージ不変性

電荷の保存は,

$$M^{\mu\mu'\cdots}_{\beta\alpha}(q,q',\cdots) \equiv \int d^4x \int d^4x' \cdots e^{-iq\cdot x}e^{-iq'\cdot x} \cdots$$
$$\times \left(\Psi_\beta{}^-, T\Big\{J^\mu(x), J^{\mu'}(x')\cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\right) \quad (10.5.1)$$

という量について有用な結果を証明するのに使える. スピノル電磁理論のように, 電磁相互作用が A^μ の場について線形な理論では, この量は, 任意の遷移 $\alpha \to \beta$ で, 4 元運動量 q, q' 等 (や $-q$, $-q'$ 等) を持つ質量殻上か殻外の光子の放出 (や吸収) の行列要素から光子の外線の係数関数やプロパゲーターを取り除いたものだ. ここで (10.5.1) は, どの光子の 4 元運動量と縮約してもゼロとなる, つまり,

$$q_\mu M^{\mu\mu'\cdots}_{\beta\alpha}(q,q',\cdots) = q'_{\mu'} M^{\mu\mu'\cdots}_{\beta\alpha}(q,q',\cdots)$$
$$= \cdots = 0 \quad (10.5.2)$$

となることを示す. M は光子の線について対称に定義されているから, これらの量の最初のものがゼロとなることを示せば十分だ.

この目的のために, 部分積分を使うと次のようになることに注目する.

$$q_\mu M^{\mu\mu'\cdots}_{\beta\alpha}(q,q',\cdots) = -i \int d^4x \int d^4x' \cdots e^{-iq\cdot x}e^{-iq'\cdot x'} \cdots$$
$$\times \left(\Psi_\beta{}^-, \frac{\partial}{\partial x^\mu} T\Big\{J^\mu(x), J^{\mu'}(x')\cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\right) . \quad (10.5.3)$$

電流 $J^\mu(x)$ は保存されるが, これはすぐに (10.5.3) がゼロとなることを意味するわけではない. なぜなら, 時間順序積の定義に現れる θ 関数の x^0 依存性を考慮に入れなければならないからだ. たとえば, 電流が二つだけのときは,

$$T\Big\{J^\mu(x)J^\nu(y)\Big\} = \theta(x^0-y^0)J^\mu(x)J^\nu(y) + \theta(y^0-x^0)J^\nu(y)J^\mu(x)$$

となるから, $J^\mu(x)$ の保存より,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,T\Big\{J^\mu(x)\,J^\nu(y)\Big\}\\&\quad=\delta(x^0-y^0)\,J^0(x)\,J^\nu(y)-\delta(y^0-x^0)\,J^\nu(y)\,J^0(x)\\&\quad=\delta(x^0-y^0)\Big[J^0(x),\,J^\nu(y)\Big]\end{aligned}\tag{10.5.4}$$

が成立する. 電流が三つ以上あるときは, $J^\mu(x)$ 自身を除く各電流についてこのような同時刻交換関係が (時間順序積のなかに) できる. この交換関係を計算するためには, (前の節で証明したように) 場の演算子, その共役, それらの微分の任意の積 F について,

$$\Big[J^0(\mathbf{x},t),\,F(\mathbf{y},t)\Big]=-q_F\,F(\mathbf{x},t)\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

が成立することを使う. ここで, q_F は F の場と場の微分の q_ℓ の和から, F の共役場と共役場の微分の q_ℓ の和をひいたものだ. 電流については, $J^\nu(y)$ 自身は電気的に中性な演算子であり, q_J はゼロだ. したがって,

$$\Big[J^0(\mathbf{x},t),\,J^\nu(\mathbf{y},t)\Big]=0\tag{10.5.5}$$

が成立し, (10.5.4) はゼロとなる. このため, (10.5.3) は,

$$q_\mu\,M_{\beta\alpha}^{\mu\mu'\cdots}(q,q',\cdots)=0\tag{10.5.6}$$

となる. これが証明したかったことだ.

この証明には重要な制限がある. (10.5.5) を導くときには, 電流演算子 $J^\nu(y)$ のような同じ時空点 y での場の積は, そのような積に現れる無限大を扱う正則化法が使えて始めて適切に定義される. 多くの場合, $J^0(\mathbf{x},t)$ と正則化されたカレント $J^i(\mathbf{y},t)$ の交換子には, ゼロとならない項がある. それはシュウィンガー項 (Schwinger term) と呼ばれる.[6] カレントが荷電スカラー場 Φ からくる項を含むとき, $\Phi^\dagger\Phi$ を含み正則化の方法に依らないシュウィンガー項が加わる. しかし, これら

のシュウィンガー項は, 光子を複数個含む振幅では, 正則化の方法 (がもしゲージ不変なら) から生じるか, 荷電スカラーのときにはラグランジアンに存在する項から直接生じる, 電磁場についての 2 次の相互作用の寄与によって消される. 我々は荷電スピノル場を中心に扱うから, 正則化の方法をシュウィンガー項を生じないもの (次元正則化) にとることにして, 以下ではこの問題を無視し, 素朴な交換関係 (10.5.5) を使いつづけることにする.

同様の議論で, たとえ光子以外の他の粒子が質量殻外にあっても, 荷電粒子が質量殻上にある, つまり, 状態 $\Psi_\beta{}^-$ と $\Psi_\alpha{}^+$ にある限り, (10.5.2) と同様な結果が得られる. この条件が満たされないと, (10.5.2) の左辺には, 前の節のワード恒等式の導出の際に出会ったような, ゼロでない同時刻交換関係からの寄与がある.

(10.5.2) から得られる一つの結果は, どの光子のプロパゲーター $\Delta_{\mu\nu}(q)$ を,

$$\Delta_{\mu\nu}(q) \to \Delta_{\mu\nu}(q) + \alpha_\mu q_\nu + q_\mu \beta_\nu \tag{10.5.7}$$

と変えても, また, どの光子の偏光ベクトルを,

$$e_\rho(\mathbf{k}, \lambda) \to e_\rho(\mathbf{k}, \lambda) + c k_\rho \tag{10.5.8}$$

と変えても S 行列要素は影響を受けないということだ. ここで, $k^0 \equiv |\mathbf{k}|$, α_μ, β_ν, c は全く任意 (定数である必要はないし, 全てのプロパゲーターと偏極ベクトルについて同じである必要もない) だ. これは, (幾分おおざっぱに) S 行列のゲージ不変性と呼ばれる.

この結果を証明するには, S 行列の光子の偏光ベクトルとプロパゲーターへの依存性を明らかにするだけでよい.

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} \propto \int & d^4 q_1\, d^4 q_2 \cdots \Delta_{\mu_1 \nu_1}(q_1) \Delta_{\mu_2 \nu_2}(q_2) \cdots \\ & \times \epsilon^*_{\rho_1}(\mathbf{k}'_1 \lambda'_1) \epsilon^*_{\rho_2}(\mathbf{k}'_2 \lambda'_2) \cdots \epsilon_{\sigma_1}(\mathbf{k}_1 \lambda_1) \epsilon_{\sigma_2}(\mathbf{k}_2 \lambda_2) \cdots \\ & \times M_{ba}^{\mu_1 \mu_2 \cdots \nu_1 \nu_2 \cdots \rho_1 \rho_2 \cdots \sigma_1 \sigma_2 \cdots} \end{aligned}$$

$$\times(-q_1,-q_2,\cdots,q_1,q_2,\cdots,-k'_1,-k'_2\cdots,k_1,k_2\cdots)\,. \tag{10.5.9}$$

ここで, $M^{\rho\sigma\cdots}$ は電磁相互作用がないときに計算した (10.5.1) の行列要素だ.* 保存則 (10.5.2) からすぐに, (10.5.7), (10.5.8) の「ゲージ変換」のもとでの (10.5.9) の不変性が言える. (9.6 節では, 経路積分を使って, ゲージ不変な演算子の時間順序積が (9.6.21) のプロパゲーターのなかの定数 α に依らない, というこの定理の特別な場合を証明した.) この結果は見た目ほど初等的なものではない. なぜなら, これは個々のダイアグラムに当てはまるのではなく, カレントの頂点をダイアグラムのあらゆる可能なところに挿入してできるダイアグラム全てについての和にのみ当てはまるからだ.

(10.5.2) の特に重要な応用としては, 光子のプロパゲーターの計算がある. 通常 $\Delta'_{\mu\nu}(q)$ と書く完全な光子のプロパゲーターは, 以下の形をとる.

$$\Delta'_{\mu\nu}(q)=\Delta_{\mu\nu}(q)+\Delta_{\mu\rho}(q)M^{\rho\sigma}(q)\Delta_{\sigma\nu}(q)\,. \tag{10.5.10}$$

ここで, $M^{\rho\sigma}$ は, (10.5.1) でカレントが 2 個, 状態 α と β が真空の場合の行列要素だ. また, $\Delta_{\mu\nu}$ は裸の光子のプロパゲーターであり, 一般的なローレンツ不変なゲージで,

$$\Delta_{\mu\nu}(q)\equiv\frac{\eta_{\mu\nu}-\xi(q^2)q_\mu q_\nu/q^2}{q^2-i\epsilon} \tag{10.5.11}$$

と書かれる. (10.5.2) より, いまは $q^\mu M_{\mu\nu}(q)=0$ となっているから,

$$q^\mu\Delta'_{\mu\nu}(q)=q^\mu\Delta_{\mu\nu}(q)=\frac{q_\nu(1-\xi(q^2))}{q^2-i\epsilon} \tag{10.5.12}$$

が成立する. 一方, 10.3 節でスカラーとスピノルの場についてしたように, 完全な光子のプロパゲーターは, (M と異なり) 1 粒子既約で光

---

*状態 a と b は α と β から光子を除いたものに等しい. M の引数は全て, 入射 4 元運動量であり, このために, (10.5.9) では M の引数のいくつかに負の符号を付けなければならない.

子の外線を 2 本持つダイアグラムの和 $\Pi^*(q)$ を使って以下の和として書ける.

$$\begin{aligned}\Delta'(q) &= \Delta(q) + \Delta(q)\Pi^*(q)\Delta(q) + \Delta(q)\Pi^*(q)\Delta(q)\Pi^*(q)\Delta(q) + \cdots \\ &= [\Delta(q)^{-1} - \Pi^*(q)]^{-1} .\end{aligned} \tag{10.5.13}$$

これは,

$$\Delta'_{\mu\nu}(q) = \Delta_{\mu\nu}(q) + \Delta_{\mu\rho}(q)\Pi^{*\rho\sigma}(q)\Delta'_{\sigma\nu}(q) \tag{10.5.14}$$

とも表せる. したがって, (10.5.12) を満たすには,

$$q_\rho \Pi^{*\rho\sigma}(q) = 0 \tag{10.5.15}$$

が成立していなければならない. これとローレンツ不変性を組み合わせると, $\Pi^*(q)$ が,

$$\Pi^{*\rho\sigma}(q) = (q^2\eta^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma)\pi(q^2) \tag{10.5.16}$$

となることがわかる. したがって, (10.5.13) は以下の形の完全なプロパゲーターを与える.

$$\Delta'_{\mu\nu}(q) = \frac{\eta_{\mu\nu} - \tilde{\xi}(q^2)q_\mu q_\nu/q^2}{[q^2 - i\epsilon][1 - \pi(q^2)]} . \tag{10.5.17}$$

ここで,

$$\tilde{\xi}(q^2) = \xi(q^2)[1 - \pi(q^2)] + \pi(q^2) \tag{10.5.18}$$

となっている.

さて, $\Pi^*_{\mu\nu}(q)$ は 1 粒子既約のダイアグラムからのみ寄与があるので, $q^2 = 0$ では極を持たないと考えられる. (ゲージ対称性が破れるときは, この重要な例外となる. これは 3 巻で論じる.) 特に, $\Pi^*_{\mu\nu}(q)$ のなかの $q_\mu q_\nu$ の項が $q^2 = 0$ に極を持たなければ, (10.5.16) の関数 $\pi(q^2)$ もそのような極を持たず, (10.5.17) の完全なプロパゲーターの

極は $q^2=0$ にある. これは, 輻射補正は光子に質量を与えないことを意味する.

くりこまれた電磁場については, 輻射補正は (10.5.17) の光子の極の留数のゲージ不変な部分をも変えない. したがって,

$$\pi(0)=0 \tag{10.5.19}$$

となる. この条件で電磁場のくりこみ定数 Z_3 が決定される. (10.4.17) のくりこんだ場で表したときには, 電磁理論のラグランジアンは,

$$\mathcal{L}=-\tfrac{1}{4}Z_3(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)+\mathcal{L}_M\left(\Psi_\ell,[\partial_\mu-iZ_3q_\ell A_\mu]\Psi_\ell\right)$$

という形をとる. したがって, 1 粒子既約な振幅のなかの関数 $\pi(q^2)$ は,

$$\pi(q^2)=1-Z_3+\pi_{\rm LOOP}(q^2) \tag{10.5.20}$$

となる. ここで, $\pi_{\rm LOOP}$ はループ・ダイアグラムの寄与だ. これより,

$$Z_3=1+\pi_{\rm LOOP}(0) \tag{10.5.21}$$

となる. 実際には, 単にループの寄与を計算し, $\pi(0)$ がゼロとなるように定数を引けばよい.

また, (10.5.18) は $q^2\neq 0$ のときに, 光子のプロパゲーターのゲージ項は輻射補正を受けることを意味する. その例外の一つはランダウ・ゲージであり, このときは全ての q^2 について, $\tilde{\xi}=\xi=1$ となる.

10.6 電磁形状因子と磁気モーメント

外から与えられた電磁場 (または他の粒子の電磁場) によるある粒子の散乱を, この電磁場については 1 次までだが, 問題とする粒子の他の全ての (電磁相互作用を含む) 相互作用については全ての次数で計算したいとする. この目的のために, 質量殻上にある粒子が 1 個入

射し, 1 個出て行き, それに加えて, 光子の線が 1 本質量殻外か殻上にある全てのファインマン・ダイアグラムの寄与の和を知る必要がある. 6.4 節の定理によれば, この和は電磁カレント $J^\mu(x)$ の 1 粒子行列要素で与えられる. この行列要素の一般的な形は何によって決まるか調べることにする.

時空並進不変性によれば, 電磁カレントの 1 粒子行列要素は以下の形をとる.

$$\Big(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'},\ J^\mu(x)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big) = \exp(i(p-p')\cdot x)\Big(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big)\ . \tag{10.6.1}$$

カレントの保存則, $\partial_\mu J^\mu = 0$, より,

$$(p'-p)_\mu\Big(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'},\ J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big) = 0 \tag{10.6.2}$$

が満たされていなければならない. また, $\mu = 0$ として, 全ての $\mathbf{x}$ について積分すると,

$$\Big(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'},\ Q\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big) = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\Big(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'},\ J^0(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big)$$

を得る. (10.4.8) を使うと, この粒子の電荷を q として,

$$\Big(\Psi_{\mathbf{p},\sigma'},\ J^0(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big) = (2\pi)^{-3}q\,\delta_{\sigma'\sigma} \tag{10.6.3}$$

となる.

また, ローレンツ不変性から要求されるカレントの行列要素に対する拘束条件も使える. これを調べるために, スピンがゼロと $\frac{1}{2}$ の単純な場合を扱うことにする. ここで述べる解析は, 半レプトン的な弱い相互作用に現れるような他のカレントに対しても役に立つ手法の例となっている.

スピン 0

スピンがゼロのときは, ローレンツ不変性により, カレントの 1 粒子行列要素は一般的に以下の形をとらなければならない.

$$\left(\Psi_{\mathbf{p}'},\ J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p}}\right) = q(2\pi)^{-3}(2p'^0)^{-1/2}(2p^0)^{-1/2}\mathcal{J}^\mu(p',p)\ . \quad (10.6.4)$$

ここで, p^0 と p'^0 は, 質量殻上のエネルギー ($p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$) であり, $\mathcal{J}^\mu(p',p)$ は 2 つの 4 元ベクトル p'^μ と p^μ の 4 元ベクトル関数だ. (後で便利なように, $\mathcal{J}$ からは, この粒子の電荷 q を取り出してある.) 明らかに, そのような 4 元ベクトル関数の最も一般的なものは, p'^μ と p^μ , または言い換えると $p'^\mu + p^\mu$ と $p'^\mu - p^\mu$ にスカラーの係数をかけて 1 次結合をとったものだ. しかし, スカラー p^2 と p'^2 は, $p^2 = p'^2 = -m^2$ と固定値を持つから, p^μ と p'^μ を使って作れるスカラー変数は $p \cdot p'$, または,

$$k^2 \equiv (p - p')^2 = -2m^2 - 2p \cdot p' \quad (10.6.5)$$

の関数だけだ. したがって, 関数 $\mathcal{J}^\mu(p',p)$ は,

$$\mathcal{J}^\mu(p',p) = (p'+p)^\mu F(k^2) + i\,(p'-p)^\mu H(k^2) \quad (10.6.6)$$

という形をとらなければならない. J^μ がエルミートであることから, $\mathcal{J}^\mu(p',p)^* = \mathcal{J}^\mu(p,p')$ が言えるから, $F(k^2)$ も $H(k^2)$ も実だ.

さて, $(p'-p)\cdot(p'+p)$ はゼロで, $(p'-p)^2 = k^2$ は一般的にはゼロでないから, カレント保存の条件は単に,

$$H(k^2) = 0 \quad (10.6.7)$$

となる. また, (10.6.4) で $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$, $\mu = 0$ として, (10.6.3) と比べると,

$$F(0) = 1 \quad (10.6.8)$$

であることがわかる. 関数 $F(k^2)$ はこの粒子の**電磁形状因子** (electromagnetic form factor) と呼ばれる.

スピン $\frac{1}{2}$

スピンが $\frac{1}{2}$ のときには, ローレンツ不変性から, カレントの1粒子行列要素は一般的に以下の形をとる.

$$\left(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'},\, J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\right) = iq\,(2\pi)^{-3}\,\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\Gamma^\mu(p',p)u(\mathbf{p},\sigma)\;. \quad (10.6.9)$$

ここで, Γ^μ は p^ν, p'^ν, γ^ν の4元ベクトルの 4×4 行列関数であり, u は通常のディラック係数関数だ. ここでは, Γ^μ の規格化を前の節と同じにするために iq の因子を取り出した.

任意の 4×4 行列でそうであるように, Γ^μ は 1, γ_ρ, $[\gamma_\rho,\gamma_\sigma]$, $\gamma_5\gamma_\rho$, γ_5 という16個の行列で展開できる. したがって, もっとも一般的な4元ベクトル Γ^μ は,

$$\begin{aligned}
1 :&\quad p^\mu\;,\; p'^\mu \\
\gamma_\rho :&\quad \gamma^\mu\;,\; p^\mu \not{p}\;,\; p'^\mu \not{p}\;,\; p^\mu \not{p}',\; p'^\mu \not{p}' \\
[\gamma_\rho,\gamma_\sigma] :&\quad [\gamma^\mu,\not{p}],\; [\gamma^\mu,\not{p}'],\; [\not{p},\not{p}']p^\mu,\; [\not{p},\not{p}']p'^\mu \\
\gamma_5\gamma_\rho :&\quad \gamma_5\gamma_\rho\;\epsilon^{\rho\mu\nu\sigma}p_\nu p'_\sigma \\
\gamma_5 :&\quad \text{無し}
\end{aligned}$$

という各項に, この問題の唯一のスカラー変数である (10.6.5) の関数をかけて1次結合をとったものと書ける. これは, u と $\bar{u}$ が満たすディラック方程式,

$$\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\,(i\not{p}'+m) = 0\,, \qquad (i\not{p}+m)\,u(\mathbf{p},\sigma) = 0$$

を使うと非常に簡単になる. この結果, 最初の3つ, つまり, p^μ, p'^μ, γ^μ 以外は全て落とすことができる.* こうして, フェルミオンの質量殻上

---

*これは, $p^\mu\not{p}$, $p'^\mu\not{p}$, $p^\mu\not{p}'$, $p'^\mu\not{p}'$ の項については自明だ. これらは, それぞれ, imp^μ, imp'^μ, imp^μ, imp'^μ で置き換えられ, どれもすでに我々のリストに入っている. また,

$$[\gamma^\mu,\not{p}] = 2\gamma^\mu\not{p} - \{\gamma^\mu,\not{p}\} = 2\gamma^\mu\not{p} - 2p^\mu\;,$$

と書け, これは $2im\gamma^\mu - 2p^\mu$ と置き換えられる. これもすでに我々のリストにある項

では Γ^μ が γ^μ, p^μ, p'^μ の 1 次結合で表される. これを以下のように書くことにする.

$$\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\Gamma^\mu(p',p)u(\mathbf{p},\sigma) = \bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\Big[\gamma^\mu F(k^2) - \frac{i}{2m}(p+p')^\mu G(k^2) + \frac{(p-p')^\mu}{2m}H(k^2)\Big]u(\mathbf{p},\sigma)\ . \tag{10.6.10}$$

$J^\mu(0)$ がエルミートなことより,

$$\beta\,\Gamma^{\mu\dagger}(p',p)\beta = -\Gamma^\mu(p,p') \tag{10.6.11}$$

と言えるから, $F(k^2)$, $G(k^2)$, $H(k^2)$ は全て k^2 の実関数でなければならない.

保存則 (10.6.2) は (10.6.10) の最初の 2 項では自動的に満たされている. これは,

$$(p'-p)_\mu\gamma^\mu = -i\Big[(i\not{p}'+m)-(i\not{p}+m)\Big]$$

と

$$(p'-p)\cdot(p'+p) = p'^2 - p^2$$

による. 一方, $(p'-p)^2$ は一般にゼロでないから, カレントの保存則より第 3 項はゼロとならなければならない.

$$H(k^2) = 0\ . \tag{10.6.12}$$

の線形結合だ. 同じことが $[\gamma^\mu, \not{p}']$ にも当てはまる. また,

$$[\not{p},\not{p}'] = -2\not{p}'\not{p} + \{\not{p},\not{p}'\} = -2\not{p}'\not{p} + 2p\cdot p'\ ,$$

より, これは, $2m^2+2p\cdot p' = -k^2$ で置きかえられる. したがって, $[\not{p},\not{p}']p^\mu$ と $[\not{p},\not{p}']p'^\mu$ の項は何も新しいものをもたらさない. 最後の項を処理するには,

$$\gamma_5\gamma_\rho\,\epsilon^{\rho\mu\nu\sigma} = \tfrac{1}{6}\,i\Big(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\sigma - \gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu - \gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma^\mu\Big)$$

という関係を使う. これと p_ν, p'_σ との縮約をとり, 全ての $\not{p}$ の因子を右に動かし, $\not{p}'$ の因子を左に動かすと, p^μ, p'^μ と γ^μ の 1 次結合が得られる.

また, (10.6.9) と (10.6.10) で $\mathbf{p}' \to \mathbf{p}$ と置くと,

$$\left(\Psi_{\mathbf{p},\sigma'} J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\right) = i\,q(2\pi)^{-3}\bar{u}(\mathbf{p},\sigma')\left[\gamma^\mu F(0) - \frac{i}{m}\,p^\mu G(0)\right]u(\mathbf{p},\sigma)$$

となることがわかる. 恒等式, $\{\gamma^\mu, i\not{p} + m\} = 2m\gamma^\mu + 2ip^\mu$ を使って, 関係式,

$$\bar{u}(\mathbf{p},\sigma')\gamma^\mu u(\mathbf{p},\sigma) = -\,\frac{ip^\mu}{m}\,\bar{u}(\mathbf{p},\sigma')u(\mathbf{p},\sigma)$$

が導かれる. また,

$$\bar{u}(\mathbf{p},\sigma')u(\mathbf{p},\sigma) = \delta_{\sigma'\sigma}m/p^0$$

であったから,

$$\left(\Psi_{\mathbf{p},\sigma'},\, J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\right) = q(2\pi)^{-3}(p^\mu/p^0)\delta_{\sigma'\sigma}\left[F(0) + G(0)\right] \quad (10.6.13)$$

となる. これを (10.6.3) とくらべると, 規格化条件,

$$F(0) + G(0) = 1 \quad (10.6.14)$$

を得る.

電磁頂点行列 Γ^μ は通常, 以下のように二つの他の行列を使って書かれることを知っておくと便利だ.

$$\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\Gamma^\mu(p',p)u(\mathbf{p},\sigma) = \bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\,\Big[\gamma^\mu F_1(k^2) + \tfrac{1}{2}\,i\,[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,(p'-p)_\nu F_2(k^2)\Big]\,u(\mathbf{p},\sigma)\,. \quad (10.6.15)$$

すでに述べたように, 第 2 項に現れる行列は $F(k^2)$ と $G(k^2)$ を定義するのに使った行列で書き換えることができる.

$$\begin{aligned}
&\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\,\tfrac{1}{2}\,i\,[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,(p'-p)_\nu\,u(\mathbf{p},\sigma)\\
&\quad= \bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\,\left[-i\not{p}'\gamma^\mu + \tfrac{1}{2}\,i\{\gamma^\mu,\not{p}'\} - i\,\gamma^\mu\not{p} + \tfrac{1}{2}\,i\{\gamma^\mu,\not{p}\}\right]\,u(\mathbf{p},\sigma)\\
&\quad= \bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\,\left[i(p'^\mu + p^\mu) + 2m\gamma^\mu\right]u(\mathbf{p},\sigma)\,. \qquad (10.6.16)
\end{aligned}$$

(10.6.15) と (10.6.10) を比べると,

$$F(k^2) = F_1(k^2) \ + \ 2m\, F_2(k^2)\,, \tag{10.6.17}$$

$$G(k^2) = -2m\, F_2(k^2) \tag{10.6.18}$$

がわかる. このため, 規格化条件 (10.6.14) は, いまや,

$$F_1(0) = 1$$

となる.

我々の粒子の磁気モーメントを, その形状因子を使って書くために, 運動量が小さい, つまり $|\mathbf{p}|, |\mathbf{p}'| \ll m$ のときに頂点関数の空間部分を考える. この目的のために, (10.6.16) を使って, (10.6.10) を ($H = 0$ で) 以下の第 3 の形に書き換えるのが便利だ.

$$\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma')\Gamma^\mu(p', p)u(\mathbf{p}, \sigma) = \frac{-i}{2m}\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma')\,\Big[(p+p')^\mu\{F(k^2) + G(k^2)\} \\ -\frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\,(p'-p)_\nu F(k^2)\Big]\,u(\mathbf{p}, \sigma)\,. \tag{10.6.19}$$

運動量がゼロのときには, ディラック行列の交換子の行列要素は (5.4.19) と (5.4.20) により,

$$\bar{u}(0, \sigma')[\gamma^i, \gamma^j]u(0, \sigma) = 4i\epsilon_{ijk}\left(J_k^{(\frac{1}{2})}\right)_{\sigma', \sigma}\,,$$

$$\bar{u}(0, \sigma')[\gamma^i, \gamma^0]u(0, \sigma) = 0$$

と与えられる. ここで, $\mathbf{J}^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ はスピン $\frac{1}{2}$ の角運動量だ. このため, 小さい運動量の 1 次で,

$$\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma')\boldsymbol{\Gamma}(p', p)u(\mathbf{p}, \sigma) \to \frac{1}{m}[(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \times \mathbf{J}^{(\frac{1}{2})}]_{\sigma'\sigma}\, F(0) \tag{10.6.20}$$

となる. したがって, 非常に弱く, 時間に依存しない外場のベクトル・ポテンシャル $A(\mathbf{x})$ のもとでは, 相互作用ハミルトニアン $H' =$

$-\int d^3x\, \mathbf{J}(\mathbf{x})\cdot A(\mathbf{x})$ の運動量が小さい状態間の行列要素は, $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times A$ を磁場として, 以下で与えられる.

$$\begin{aligned}
&(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, H'\Psi_{\mathbf{p},\sigma}) \\
&= \frac{-iqF(0)}{m(2\pi)^3}\int d^3x\, e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} A(\mathbf{x})\cdot[(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\times\mathbf{J}^{(\frac{1}{2})}]_{\sigma'\sigma} \\
&= -\frac{qF(0)}{m(2\pi)^3}\int d^3x\, e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}}(\mathbf{J}^{(\frac{1}{2})})_{\sigma'\sigma}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{x})\,. \qquad (10.6.21)
\end{aligned}$$

したがって, 弱い磁場がゆっくり変化する極限では, 相互作用ハミルトニアンの行列要素は,

$$(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, H'\Psi_{\mathbf{p},\sigma}) = -\frac{qF(0)}{m}(\mathbf{J}^{(\frac{1}{2})})_{\sigma'\sigma}\cdot\mathbf{B}\,\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \qquad (10.6.22)$$

となる. 一般のスピン j を持つ任意の粒子の磁気モーメント μ はその粒子と弱くゆっくり変化する磁場の相互作用の行列要素が,

$$(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, H'\Psi_{\mathbf{p},\sigma}) = -\frac{\mu}{j}(\mathbf{J}^{(j)})_{\sigma'\sigma}\cdot\mathbf{B}\,\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \qquad (10.6.23)$$

となることで定義される. したがって, (10.6.22) から, 電荷 q, 質量が m, スピン $\frac{1}{2}$ の粒子の磁気モーメントが,

$$\mu = \frac{qF(0)}{2m} \qquad (10.6.24)$$

と決まる. これは, 特別な場合として, 輻射補正が無いときのスピン $\frac{1}{2}$ の粒子に対する有名なディラックの $\mu = q/2m$ という結果[7]を含んでいる.

陽子の形状因子 $F(k^2)$ と $G(k^2)$ は, $k^2 > 0$ で電子・陽子散乱の実験結果と実験室系の微分断面積のローゼンブルッス (Rosenbluth)[8] の表式,

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} = &\frac{e^4}{4(4\pi)^2E_0^2}\,\frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}\left[1+\frac{2E_0}{m}\sin^2(\theta/2)\right]^{-1} \\
&\times\left\{\Big(F(k^2)+G(k^2)\Big)^2+\frac{k^2}{4m^2}\Big(2F^2(k^2)\tan^2(\theta/2)+G^2(k^2)\Big)\right\}
\end{aligned}$$

とを比べて測定されることを, 証明無しに述べておく. ここで, E_0 は入射電子のエネルギー (ここでは, $E_0 \gg m_e$ とする), θ は散乱角, そして,

$$k^2 = \frac{4\,E_0^2 \sin^2(\theta/2)}{1 + (2E_0/m)\sin^2(\theta/2)}$$

としている.

10.7 チェレン・レーマン表示*

10.2 節で, 1 粒子中間状態があると, (10.2.1) のような時間順序積の行列要素のフーリエ変換に極が生じることをみた. 多粒子中間状態があるとより複雑な特異性が生じ, これを一般的に書き下すのは難しい. しかし, 単に二つの演算子のみを含む真空期待値という特別の場合では, フーリエ変換の解析的構造を陽に表す便利な表示がある. とくに, その二つの演算子を素粒子の場にとれば, この表現はプロパゲーターに使える. 量子力学の正定値性と組み合わせると, この表示からは, プロパゲーターの漸近的振舞いとくりこみ定数の大きさについて興味深い制限が得られる.

複素スカラーのハイゼンベルグ表示演算子 $\Phi(x)$ を考える. これは, 素粒子の場であっても, そうでなくてもよい. 積 $\Phi(x)\Phi^\dagger(y)$ の真空期待値は, 以下のように書ける.

$$\langle \Phi(x)\Phi^\dagger(y)\rangle_0 = \sum_n \langle 0|\Phi(x)|n\rangle \, \langle n|\Phi^\dagger(y)|0\rangle \, . \qquad (10.7.1)$$

ここで, 和は任意の完全系の状態全てについてとる. (ここで n についいての和は離散的な指標についてだけでなく連続的な指標についての積分も含んでいる.) これらの状態を 4 元運動量 P^μ の固有状態に

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

選ぶと, 並進不変性から,

$$\langle 0|\Phi(x)|n\rangle = \exp(ip_n \cdot x)\langle 0|\Phi(0)|n\rangle ,$$
$$\langle n|\Phi^\dagger(y)|0\rangle = \exp(-ip_n \cdot y)\langle n|\Phi^\dagger(0)|0\rangle \tag{10.7.2}$$

といえるので,

$$\langle \Phi(x)\Phi^\dagger(y)\rangle_0 = \sum_n \exp(ip_n \cdot (x-y))\, |\langle 0|\Phi(0)|n\rangle|^2 \tag{10.7.3}$$

が成立する. これを**スペクトル関数** (spectral function) を使って書き換えると便利だ. 和 $\sum_n \delta^4(p-p_n)\,|\langle 0|\Phi(0)|n\rangle|^2$ は 4 元ベクトル p^μ のスカラー関数だから, p^2 と ($p^2 \le 0$ のときは) 階段関数 $\theta(p^0)$ のみに依存できる. 実際, (10.7.3) の中間状態は全て, $p^2 \le 0$ と $p^0 > 0$ を満たすので, この和は以下の形をとる.

$$\sum_n \delta^4(p-p_n)\,|\langle 0|\Phi(0)|n\rangle|^2 = (2\pi)^{-3}\,\theta(p^0)\,\rho(-p^2)\,. \tag{10.7.4}$$

ここで, $p^2 > 0$ では $\rho(-p^2) = 0$ とする. (後で便利なように ρ から $(2\pi)^{-3}$ の因子を取り出してある.) スペクトル関数 $\rho(-p^2)$ は明らかに実で正だ. この定義を使うと (10.7.3) を以下のように書きかえることができる.

$$\begin{aligned}\langle \Phi(x)\Phi^\dagger(y)\rangle_0 &= (2\pi)^{-3}\int d^4p\ \exp[ip\cdot(x-y)]\,\theta(p^0)\,\rho(-p^2)\\ &= (2\pi)^{-3}\int d^4p \int_0^\infty d\mu^2\ \exp[ip\cdot(x-y)]\,\theta(p^0)\\ &\qquad \times \rho(\mu^2)\,\delta(p^2+\mu^2)\,. \end{aligned}\tag{10.7.5}$$

p^μ と μ^2 についての積分の順序を交換すると, これは,

$$\langle \Phi(x)\Phi^\dagger(y)\rangle_0 = \int_0^\infty d\mu^2\ \rho(\mu^2)\,\Delta_+(x-y;\mu^2) \tag{10.7.6}$$

と表すことができる. ここで, Δ_+ はなじみの関数で,

$$\Delta_+(x-y;\mu^2) \equiv (2\pi)^{-3}\int d^4p\ \exp[ip\cdot(x-y)]\,\theta(p^0)\,\delta(p^2+\mu^2) \tag{10.7.7}$$

と定義されている.

ちょうど同じように, 以下を示すことができる.

$$\langle\Phi^\dagger(y)\Phi(x)\rangle_0 = \int_0^\infty d\mu^2\ \bar{\rho}(\mu^2)\,\Delta_+(y-x;\mu^2)\,. \tag{10.7.8}$$

ここで, 第 2 のスペクトル関数 $\bar{\rho}(\mu^2)$ は,

$$\sum_n \delta^4(p-p_n)\left|\langle n|\Phi^\dagger(0)|0\rangle\right|^2 = (2\pi)^{-3}\,\theta(p^0)\,\bar{\rho}(-p^2) \tag{10.7.9}$$

で定義される.

ここで, 交換子 $[\Phi(x),\Phi^\dagger(y)]$ は $x-y$ が空間的距離であるときにゼロとなるという因果律を使うことができる. この交換子の真空期待値は,

$$\begin{aligned}&\langle[\Phi(x),\Phi^\dagger(y)]\rangle_0\\ &\quad= \int_0^\infty d\mu^2\ \left(\rho(\mu^2)\,\Delta_+(x-y;\mu^2) - \bar{\rho}(\mu^2)\,\Delta_+(y-x;\mu^2)\right)\end{aligned} \tag{10.7.10}$$

で与えられる. 5.2 節で述べたように, $x-y$ が空間的であるときには, 関数 $\Delta_+(x-y)$ はゼロとならず, 偶関数となっている. (10.7.10) が任意の空間的距離でゼロとなるには, 以下が必要だ.

$$\rho(\mu^2) = \bar{\rho}(\mu^2)\,. \tag{10.7.11}$$

これは, $p^2=-\mu^2$ の任意の状態が演算子 Φ の量子数を持つとき, これに対応して $\Phi^\dagger$ の量子数を持つ $p^2=-\mu^2$ の状態が存在しなければならない, という CPT 定理の特別な場合になっている. ここでは, これを摂動論を使わずに証明したことになる.

(10.7.11) を使うと, この時間順序積の真空期待値は,

$$\langle T\left\{\Phi(x)\Phi^\dagger(y)\right\}\rangle_0 = -i\int_0^\infty d\mu^2\ \rho(\mu^2)\,\Delta_F(x-y;\mu^2) \tag{10.7.12}$$

となる. ここで, $\Delta_F(x-y;\mu^2)$ は以下の質量 μ のスピンゼロの粒子のファインマン・プロパゲーターだ.

$$-i\Delta_F(x-y;\mu^2) \equiv \theta(x^0-y^0)\Delta_+(x-y;\mu^2) - \theta(y^0-x^0)\Delta_+(y-x;\mu^2)\,. \tag{10.7.13}$$

完全なプロパゲーターについて 10.3 節で導入した記法を借りて, 運動量空間の関数,

$$-i\Delta'(p) \equiv \int d^4x\ \exp[-ip\cdot(x-y)]\,\langle T\left\{\Phi(x)\Phi^\dagger(y)\right\}\rangle_0 \tag{10.7.14}$$

を導入する.

$$\int d^4x\ \exp[-ip\cdot(x-y)]\,\Delta_F(x-y;\mu^2) = \frac{1}{p^2+\mu^2-i\epsilon} \tag{10.7.15}$$

であったから, これより, 以下のスペクトル表示[9] を得る.

$$\Delta'(p) = \int_0^\infty \rho(\mu^2)\,\frac{d\mu^2}{p^2+\mu^2-i\epsilon}\,. \tag{10.7.16}$$

この結果と, $\rho(\mu^2)$ の正定値性からすぐにわかることは, $\Delta'(p)$ は $|p^2|\to\infty$ のときに裸のプロパゲーター $1/(p^2+m^2-i\epsilon)$ より早くゼロに近づくことはできない** ということだ. 時折, $|p^2|\to\infty$ でプロパゲーターが $1/p^2$ より早くゼロにいくように, 非摂動ラグランジアンに高次微分項を含めるという提案がなされる. しかし, スペクトル表示によれば, これは必然的に量子力学の正定値性から離脱することになることがわかる.

**実際, $\Delta'(p)$ はスペクトル表示から $|p^2|\to\infty$ でゼロに近づくように思えるが, これさえ確実ではない. 問題は p^μ と μ^2 の積分の順序の交換にある. 確実なのは, $\Delta'(p)$ は $-p^2$ の解析関数であり, 正の実軸上, $-p^2=\mu^2$ で $\pi\rho(\mu^2)$ の不連続性を持つことだ. これは次の節の方法で示せる. これより, $\Delta'(p)$ はスペクトル関数 $\rho(\mu^2)$ を持ち, 必要であれば引き算をした分散関係,

$$\Delta'(p) = P(p^2) + (-p^2+\mu_0^2)^n \int_0^\infty \frac{\rho(\mu^2)}{(\mu^2+\mu_0^2)^n}\,\frac{d\mu^2}{p^2+\mu^2-i\epsilon}$$

で表されることがわかる. ここで, n は正の整数, μ_0^2 は任意の正定数, $P(p^2)$ は μ_0^2 に依存する p^2 の $n-1$ 次の多項式であり, $n=0$ では存在しない.

スペクトル表示と同時刻交換関係を使うと, スペクトル関数について興味深い和則を導くことができる. もし, $\Phi(x)$ が通常のように規格化された (くりこまれていない) 正準場の演算子であれば,

$$\left[\frac{\partial\Phi(\mathbf{x},t)}{\partial t}\,,\,\Phi^\dagger(\mathbf{y},t)\right] = -i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{10.7.17}$$

となる.

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\Delta_+(x-y)\bigg|_{x^0=y^0} = -i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

だから, スペクトル表示 (10.7.10) と交換関係 (10.7.17) を合わせると,

$$\int_0^\infty \rho(\mu^2)\,d\mu^2 = 1 \tag{10.7.18}$$

がわかる. これは, $|p^2| \to \infty$ で, くりこまれていない場の運動量空間でのプロパゲーター (10.7.16) は自由場の漸近的振舞い,

$$\Delta'(p) \to \frac{1}{p^2}$$

を示す. 摂動論ではくりこまれていない場は無限大の行列要素をもち, そのプロパゲーターは定義されないから, この結果は, 紫外発散を正則化するのに適切な方法があって初めて意味のあるものだ.

さて, 状態 $\langle 0|\Phi(0)$ との行列要素がゼロでない質量が m の 1 粒子状態 $|\mathbf{k}\rangle$ がある場合を考える. ローレンツ不変性から, この行列要素は次の形をとらなければならない.

$$\langle 0|\Phi(0)|\mathbf{k}\rangle = (2\pi)^{-3/2}\left(2\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}\right)^{-1/2} N\,. \tag{10.7.19}$$

ここで N は定数だ. 10.3 節の一般的な結果によれば, くりこまれていない場のプロパゲーター $\Delta'(p)$ は $p^2 \to -m^2$ で留数 $Z \equiv |N|^2 > 0$ の極を持たなければならない. つまり, $\sigma(\mu^2) \geq 0$ を多粒子状態の寄与とすると,

$$\rho(\mu^2) = Z\delta(\mu^2 - m^2) + \sigma(\mu^2) \tag{10.7.20}$$

となる. (10.7.18) も使うと, これは,

$$1 = Z + \int_0^\infty \sigma(\mu^2)\, d\mu^2 \tag{10.7.21}$$

という結果をもたらすので,

$$Z \le 1 \tag{10.7.22}$$

となる. ここで, 等号は自由場のときにのみ成立し, このときには, $\langle 0|\Phi(x)$ は多粒子状態との行列要素を持たない.

Z は正だから, (10.7.21) は場 Φ の多粒子状態との結合の上限を以下のように与えるとみることもできる.

$$\int_0^\infty \sigma(\mu^2)\, d\mu^2 \le 1\,. \tag{10.7.23}$$

ここで, 等号は $Z = 0$ のときにのみ成立する. $Z = 0$ の極限は, 粒子が素粒子ではなく複合粒子だという興味深い解釈ができる.[10] ここでは「複合」粒子とは, その場がラグランジアンに現れないものをいう. そのような粒子で, 例えばスピンがゼロで中性なものを考える. この粒子は, 他の場から作られた $F(\Psi)$ で消されるような量子数をもつとする. ラグランジアン密度に $\Delta\mathcal{L} = (\Phi - F(\Psi))^2$ の形の項を付け加えて, この粒子のための場 Φ を導入することが自由にできる.† これは Φ についての経路積分は, この場を停留点 $\Phi = F(\Psi)$ に等しいとおいて評価でき, その点では, $\Delta\mathcal{L} = 0$ となるからだ. しかし, そうせずに $\Delta\mathcal{L} = \Delta\mathcal{L}_0 + \Delta\mathcal{L}_1$ と書くことにしよう. そして, $\Delta\mathcal{L}_0 \equiv -\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}m^2\Phi^2$ は通常の自由場のラグランジアンであり, $\Delta\mathcal{L}_1 \equiv \Delta\mathcal{L} - \Delta\mathcal{L}_0$ は相互作用として扱う. 相互作用の中の $\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi$ の項は何も新しいものではない. (10.3.12) にはそのような $(1-Z)$ の因子を持つ項があった. 新しいのは, ここでは $Z = 0$ だと

---

†物性理論では, これは「ハバード・ストラトノビッチ変換」(Hubbard–Stratonovich transformation)[11] として知られている. これは 4 巻で超電導を論じるときに電子対の場を導入するために使う.

いうことだ. 場のくりこみ条件 $\Pi^{*\prime}(0)=0$ を満たすように Z を調整する代わりに, ここでは, これをこの複合粒子の結合定数についての条件とみなす. 残念ながら, $Z=0$ はすでにみたようにこの粒子がその構成粒子と最大限強く結合することを意味し, 摂動論を適用できないので, この手続きを場の量子論に適用することはできていない. ただ, $Z=0$ の条件は, 非相対論的量子力学では役に立つ. たとえば, これは重陽子の中性子および陽子との結合を決定する.[12]

ここではスペクトル表示はスピンがゼロの場についてのみ導いたが, この結果は簡単に他の場にも一般化できる. 実際, 次の章では, e^2 の次数で, 電磁場の Z の因子 (通常 Z_3 と呼ばれる) は

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right)$$

で与えられることをみる. (ここで, $\Lambda \gg m_e$ は紫外切断だ.) これは, (10.7.22) の制限を満たす.

10.8 分散関係*

当初, 強い核力と弱い核力に摂動論的場の量子論を適用しようと試みられたが, これは失敗に終わった. そこで, 1950 年代の終わりには, 理論家たちは散乱振幅の解析性とユニタリ性を使い, 特定の場の理論に依らない一般的な非摂動論的結果を導こうとするようになった. これにより, まず, 分散関係への興味が復活した. もともと,[13] 分散関係は屈折率の実部をその虚部についての積分で表す式であった. それは, 物質中の電磁的信号は真空中の光の速さより早く伝搬することができないという条件からくる, 振動数の関数としての屈折率の解析性から導かれる. 屈折率は光子の前方散乱振幅で表せる. これを使うと, 分

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

散関係は, 前方散乱振幅の実部をその虚数部積分で表す表式に書きかえれる. さらにユニタリ性から, これは全断面積の積分となる. この関係式はすばらしいことに, 通常の摂動論に取って代るものを提供する. たとえば, 散乱振幅が e^2 の次数まで与えられれば, 断面積と散乱振幅の虚数部が e^4 の次数までわかる. これに分散関係を使えば, ループ・ダイアグラムを計算すること無く, 前方散乱振幅の実数部をこの次数まで求めることができる.

分散関係への現代的なアプローチは 1954 年のゲルマン・ゴールドバーガー・ティリング (Gell-Mann, Goldberger, Thirring)[14] の仕事で始まった. 彼らは, 物質中の光の伝播を考える代わりに, 場の演算子の間隔が空間的であるときには交換子がゼロとなるという微視的因果律から直接に散乱振幅の解析性を導き出した. その直後に, このアプローチから, ゴールドバーガー[15] は, 非常に役立つパイオン・核子前方散乱振幅の分散関係を導いた.

微視的因果律の原理をどのように使うかをみるために, 質量 $m_\alpha > 0$ で運動量 $\mathbf{p}_\alpha = 0$ の任意の標的 α による任意のスピンを持つ質量ゼロのボソンの実験室系での前方散乱を考える. (これには光子のみならず, パイオンの $m_\pi = 0$ の極限での散乱という重要な応用がある. これは 3 巻で述べる.) (10.3.4) または LSZ 定理[3]を繰り返して使うと, S 行列要素は,

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{4\omega\omega'}|N|^2} \lim_{k^2\to 0} \lim_{k'^2\to 0} \\ & \times \int d^4x \int d^4y \, e^{-ik'\cdot y} e^{ik\cdot x} (i\Box_y)(i\Box_x) \\ & \times \langle\alpha|T\{A^\dagger(y),\, A(x)\}|\alpha\rangle \end{aligned} \tag{10.8.1}$$

となることがわかる. ここで, k と k' はボソンの初期と終期の 4 元運動量で, $\omega = k^0$, $\omega' = k'^0$ だ. また, $A(x)$ は 1 ボソン状態 $|k\rangle$ と真空の間の行列要素, $\langle \text{VAC}|A(x)|k\rangle = (2\pi)^{-3/2}(2\omega)^{-1/2}Ne^{ik\cdot x}$ がゼロとなら

ない任意のハイゼンベルグ表示の演算子であり, N はこの行列要素の中の定数だ. 光子散乱では $A(x)$ は電磁場の横成分の一つで, 質量ゼロのパイオンの散乱ではハドロン場の擬スカラー関数だ. 微分演算子 $-i\Box_x$ と $-i\Box_y$ は外線のボソン・プロパゲーターを打ち消すために必要な因子 ik'^2 と ik^2 を与えるために挿入してある. これらの演算子を $A^\dagger(y)$ と $A(x)$ に作用させると以下を得る.

$$\begin{aligned} S = & \frac{-1}{(2\pi)^3\sqrt{4\omega\omega'}|N|^2} \lim_{k^2\to 0} \lim_{k'^2\to 0} \\ & \times \int d^4x \int d^4y \, e^{-ik'\cdot y} \, e^{ik\cdot x} \langle\alpha|T\{J^\dagger(y),\, J(x)\}|\alpha\rangle \\ & +\mathrm{ETC}\,. \end{aligned} \tag{10.8.2}$$

ここで, $J(x) \equiv \Box_x A(x)$ であり,「ETC」は時間順序積の階段関数に微分が作用してできる同時刻交換子のフーリエ変換の項を表す. $A(x)$ や $A^\dagger(y)$ (またはそれらの微分) 等の演算子の交換子は $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ でない限り $x^0=y^0$ でゼロとなるから,「ETC」の項は $\delta^4(x-y)$ にはたらく微分演算子のフーリエ変換であり, ボソンの 4 元運動量の多項式となる. ここでは, S 行列要素の解析性を問題としているので, この多項式の詳細は関係ない.

並進不変性を使うと, (10.8.2) から, S 行列要素が $S=-2\pi i\delta^4(k'-k)M(\omega)$ と表されることがわかる. ここで,

$$M(\omega) = \frac{-i}{2\omega|N|^2}\, F(\omega)\,, \tag{10.8.3}$$

$$F(\omega) \equiv \int d^4x \; e^{i\omega\,\ell\cdot x} \langle\alpha|T\{J^\dagger(0)\,,\, J(x)\}|\alpha\rangle \; + \; \mathrm{ETC} \tag{10.8.4}$$

であり, また, ℓ を $\ell^\mu\ell_\mu=0$, $\ell^0=1$ を満たす定 4 元ベクトルとして, $k^\mu=\omega\ell^\mu$ ととった.

この時間順序積は交換子を使って, 以下のように 2 つの異なった仕方で書き換えることができる.

$$T\{J^\dagger(0), J(x)\} = \theta(-x^0)[J^\dagger(0), J(x)] + J(x)J^\dagger(0)$$

$$= -\theta(x^0)[J^\dagger(0), J(x)] + J^\dagger(0)J(x) \ . \quad (10.8.5)$$

これに対応して,

$$F(\omega) = F_A(\omega) + F_+(\omega) = F_R(\omega) + F_-(\omega) \quad (10.8.6)$$

と書ける. ただし以下の定義を使った.

$$F_A(\omega) \equiv \int d^4x\ \theta(-x^0)\ \langle\alpha|[J^\dagger(0)\,,\,J(x)]|\alpha\rangle\, e^{i\omega\,\ell\cdot x}\ +\ \mathrm{ETC}\ , \quad (10.8.7)$$

$$F_R(\omega) \equiv -\int d^4x\ \theta(x^0)\ \langle\alpha|[J^\dagger(0)\,,\,J(x)]|\alpha\rangle\, e^{i\omega\,\ell\cdot x}\ +\ \mathrm{ETC}\ , \quad (10.8.8)$$

$$F_+(\omega) \equiv \int d^4x\ \langle\alpha|J(x)\,J^\dagger(0)|\alpha\rangle\, e^{i\omega\,\ell\cdot x}\ , \quad (10.8.9)$$

$$F_-(\omega) \equiv \int d^4x\ \langle\alpha|J^\dagger(0)\,J(x)|\alpha\rangle\, e^{i\omega\,\ell\cdot x}\ . \quad (10.8.10)$$

微視的因果律によれば, (10.8.7) と (10.8.8) の積分で x^μ が光錐の中にないとゼロとなる. したがって階段関数は (10.8.7) では x^μ が過去の光錐内にあり, $x\cdot\ell > 0$ であり, (10.8.8) では未来の光錐内, つまり $x\cdot\ell < 0$ を要求する. これより, $F_A(\omega)$ は $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ で解析的で, $F_R(\omega)$ は $\mathrm{Im}\,\omega < 0$ で解析的だ. これは, どちらの場合も因子 $e^{i\omega\,\ell\cdot x}$ は x^μ についての積分の切断を与えるからだ. (「ETC」項は多項式なので, 全ての有限の点で解析的であった.) このため, 以下の関数を定義する.

$$\mathcal{F}(\omega) \equiv \begin{cases} F_A(\omega) & \mathrm{Im}\,\omega > 0\ , \\ F_R(\omega) & \mathrm{Im}\,\omega < 0\ . \end{cases} \quad (10.8.11)$$

これは ω の実軸上のカットを除き全平面で解析的だ.

これで分散関係式を導くことができる. (10.8.6) によれば, $\mathcal{F}(\omega)$ のどんな実の E での不連続性も,

$$\mathcal{F}(E+i\epsilon)-\mathcal{F}(E-i\epsilon) = F_A(E)-F_R(E) = F_-(E)-F_+(E) \quad (10.8.12)$$

を満たす. もし, $\mathcal{F}(\omega)/\omega^n$ が $|\omega| \to \infty$ のときに上半面か下半面でゼロとなるなら, 次数 n の任意の多項式 $P(\omega)$ で割ることによって, $|\omega| \to \infty$ でゼロとなり, 実軸上のカットと $P(\omega)$ のゼロ点 ω_ν での極を除いては解析的な関数を得ることができる. ($\mathcal{F}(\omega)$ 自身が $|\omega| \to \infty$ でゼロとなる場合は, $P(\omega) = 1$ ととれる.) 留数の方法によれば,

$$\frac{\mathcal{F}(\omega)}{P(\omega)} + \sum_\nu \frac{\mathcal{F}(\omega_\nu)}{(\omega_\nu - \omega)\, P'(\omega_\nu)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\mathcal{F}(z)\, dz}{(z-\omega)\, P(z)} \tag{10.8.13}$$

となる. ここで, ω は実軸上にはないがそれ以外は任意の点だ. また C は二つの部分からなる. 一つは, $-\infty + i\epsilon$ から $+\infty + i\epsilon$ へ実軸のすぐ上を通り, 大きな半円をまわって $-\infty + i\epsilon$ に戻る部分で, もう一つは $+\infty - i\epsilon$ から $-\infty - i\epsilon$ へ実軸のすぐ下を通り, 大きな半円を通って $+\infty - i\epsilon$ に戻る部分だ. 関数 $\mathcal{F}(z)/P(z)$ は $|z| \to \infty$ でゼロとなるから, 大きな半円からの寄与は無視できる. (10.8.12) を使うと, (10.8.13) は,

$$\mathcal{F}(\omega) = Q(\omega) + \frac{P(\omega)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(E) - F_+(E)}{(E-\omega)\, P(E)}\, dE \tag{10.8.14}$$

となる. ここで, $Q(\omega)$ は以下の $(n-1)$ 次の多項式だ.

$$Q(\omega) \equiv -P(\omega) \sum_\nu \frac{\mathcal{F}(\omega_\nu)}{(\omega_\nu - \omega)\, P'(\omega_\nu)} .$$

このような分散関係式で $P(\omega)$ と $Q(\omega)$ が, それぞれ, n と $n-1$ 次の多項式になっているとき, この式には n **個の引き算** (n-subtractions) があるという. もし, $P = 1$ ととることができれば, $Q = 0$ であり, 分散関係には引き算がないという.

もし ω を実軸に向かって上から近づけると, (10.8.14) から,

$$F_A(\omega) = Q(\omega) + \frac{P(\omega)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(E) - F_+(E)}{(E - \omega - i\epsilon)\, P(E)}\, dE \tag{10.8.15}$$

となる. (10.8.6) と (3.1.25) を使うと, これは,

$$F(\omega) = Q(\omega) + \frac{1}{2}F_-(\omega) + \frac{1}{2}F_+(\omega) \\ + \frac{P(\omega)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(E) - F_+(E)}{(E-\omega)\,P(E)}\,dE \tag{10.8.16}$$

と書ける. ここで, $1/(E-\omega)$ は主値関数 $\mathcal{P}/(E-\omega)$ と解釈する.

この結果は, 関数 $F_\pm(E)$ が測定できる断面積で表されているので有用だ. (10.8.9) と (10.8.10) で多粒子中間状態 β の完全系について (β の各粒子の運動量についての積分も含む) 和をとり, 並進不変性を再び使うと以下を得る.

$$F_+(E) = (2\pi)^4 \sum_\beta \left|\langle\beta|J(0)^\dagger|\alpha\rangle\right|^2\ \delta^4(-p_\alpha + E\ell + p_\beta)\ , \tag{10.8.17}$$

$$F_-(E) = (2\pi)^4 \sum_\beta |\langle\beta|J(0)|\alpha\rangle|^2\ \delta^4(p_\alpha + E\ell - p_\beta)\ . \tag{10.8.18}$$

しかし, 質量ゼロのスカラー・ボソン B の $B+\alpha\to\beta$ での吸収と, その反粒子 B^c の $B^c+\alpha\to\beta$ での吸収の行列要素は,

$$-2i\pi M_{B^c+\alpha\to\beta} = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_{B^c}}N}\langle\beta|J^\dagger(0)|\alpha\rangle\ , \tag{10.8.19}$$

$$-2i\pi M_{B+\alpha\to\beta} = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_B}N}\langle\beta|J(0)|\alpha\rangle \tag{10.8.20}$$

で与えられる. これを (3.4.15) と比べると, $F_\pm(E)$ が $\mp E$ のエネルギーで全断面積を使って以下のように表されることがわかる.**

$$F_+(E) = \theta(-E)\frac{2|E||N|^2}{(2\pi)^3}\sigma_{\alpha+B^c}(|E|)\ , \tag{10.8.21}$$

$$F_-(E) = \theta(E)\frac{2E|N|^2}{(2\pi)^3}\sigma_{\alpha+B}(E)\ . \tag{10.8.22}$$

**場合によっては, 選択則が $\alpha\to\alpha+B$ と $\alpha\to\alpha+B^c$ の遷移を許すが, このようなときには, 関数 $F_\pm(E)$ は $\delta(E)$ に比例する項も含む. このような項は, 中間状態 β の和の中の 1 粒子状態 α の寄与から起こる. このようなことは横偏極した光子や $m_\pi\to 0$ の極限でのパイオンには起こらない.

これで, (10.8.3) の散乱振幅は実の $\omega > 0$ について,

$$M(\omega) = \frac{-iQ(\omega)}{2\omega|N|^2} - \frac{i}{2(2\pi)^3}\sigma_{\alpha+B}(\omega) - \frac{P(\omega)}{\omega(2\pi)^4}\int_0^\infty \left[\frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E-\omega)P(E)} + \frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E+\omega)P(-E)}\right] E\,dE \tag{10.8.23}$$

となった. この分散関係は, 実験室系での前方散乱振幅 $f(\omega)$ を使って表すのが普通だ. この振幅は実験室系での前方微分断面積が $|f(\omega)|^2$ で表されるように定義しておく. この振幅は $M(\omega)$ を使って $f(\omega) = -4\pi^2\omega\, M(\omega) = 2\pi^2 iF(\omega)/|N|^2$ と与えられるから, (10.8.23) は $R(\omega) \equiv 2i\pi^2\, Q(\omega)/|N|^2$ として以下のようになる.

$$f(\omega) = R(\omega) + \frac{i\omega}{4\pi}\sigma_{\alpha+B}(\omega) + \frac{P(\omega)}{4\pi^2}\int_0^\infty \left[\frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E-\omega)P(E)} + \frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E+\omega)P(-E)}\right] E\,dE\,.$$

光学定理 (3.6.4) によれば右辺の第 2 項は $i\,\mathrm{Im}\,f(\omega)$ に等しいから, これは以下の通常の形に書き換えてもよい.

$$\mathrm{Re}\,f(\omega) = R(\omega) + \frac{P(\omega)}{4\pi^2}\int_0^\infty \left[\frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E-\omega)P(E)} + \frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E+\omega)P(-E)}\right] E\,dE\,. \tag{10.8.24}$$

特に, $P(\omega)$ を実に選べば, $R(\omega)$ が実であることがわかる.

また, 前方散乱振幅はある重要な対称性の条件を満たす. (10.8.7) と (10.8.8) で積分変数を x から $-x$ へ変え, 並進不変性,

$$\langle\alpha|[J^\dagger(0)\,,\,J(-x)]|\alpha\rangle = \langle\alpha|[J^\dagger(x)\,,\,J(0)]|\alpha\rangle$$

を使うと, $\mathrm{Im}\,\omega \leq 0$ では, $F_A(-\omega)$ は, J を $J^\dagger$ に置き換えれば $F_R(\omega)$ に同じだとわかる. つまり, α による反粒子 B^c の散乱の振幅を意味

するのに添字 c を使って,

$$F_A(-\omega) = F_R^c(\omega) \qquad (\mathrm{Im}\,\omega \leq 0 \text{ のとき})$$

となる. (この関係式が, (10.8.7) と (10.8.8) の同時刻交換関係項で破られないことの証明は読者に残しておく.) 同様にして,

$$F_R(-\omega) = F_A^c(\omega) \qquad (\mathrm{Im}\,\omega \geq 0 \text{ のとき})$$

であり, 実の ω については

$$F_\pm(-\omega) = F_\mp(\omega)$$

となる. これらの関係を (10.8.6) に使い, $f(\omega)$ は $F(\omega)$ に比例していたことを思い出すと, 実の ω について, 以下の**交差対称性** (crossing symmetry) の関係式を得る.

$$f(-\omega) = f^c(\omega)\,. \tag{10.8.25}$$

$P(\omega)$ は十分に高い次数の任意の多項式にとれるが, そのとき, $R(\omega)$ は $P(\omega)$ だけでなく $P(\omega)$ のゼロ点での $\mathcal{F}(\omega)$ の値に依る. $P(\omega)$ が実で, n 次のとき, (10.8.16) にある自由パラメータは, 実の $(n-1)$ 次の多項式 $R(\omega)$ の n 個の実係数だけだ. したがって, (10.8.16) は与えられた $P(\omega)$ にたいして多項式 $R(\omega)$ の係数である未知の独立な実定数をちょうど n 個含む. したがって, 任意の多項式である $P(\omega)$ の次数 n はなるべく小さく選ぶ方がよい.

$P(\omega) = 1$ と選ぼうとしても, うまくはいかない. 3.7 節の解析によれば, 前方散乱振幅は ω か, 多分 $\omega \ln^2 \omega$ 程度に増大する. この場合に $f(\omega)/P(\omega)$ が $\omega \to \infty$ のときにゼロとなるには, $P(\omega)$ を 2 次多項式にとり, $R(\omega)$ が ω について 1 次になるようにすれば充分だ. 便宜的に $P(E) = E^2$ と選ぶと, (10.8.24) は,

$$\mathrm{Re}\, f(\omega) = a + b\omega$$

$$+\frac{\omega^2}{4\pi^2}\int_0^\infty \left[\frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E-\omega)}+\frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E+\omega)}\right]\frac{dE}{E} \qquad (10.8.26)$$

となる. ここで, a と b は未知の実定数だ. 交差対称性条件 (10.8.25) から, 反粒子の散乱振幅 $f^c(\omega)$ の分散関係の対応する定数は,

$$a^c = a\,, \qquad b^c = -b \qquad (10.8.27)$$

となる.

たとえば, 断面積 $\sigma_{\alpha+B}(E)$ と $\sigma_{\alpha+B^c}(E)$ が $E\to\infty$ で異なる係数と $(\ln E)^r$ の積のように振舞うならば, (10.8.26) から

$$\mathrm{Re}\, f(\omega) \sim [\sigma_{\alpha+B}(\omega)-\sigma_{\alpha+B^c}(\omega)]\omega\ln\omega \sim \omega(\ln\omega)^{r+1} \qquad (10.8.28)$$

となるので, 散乱振幅の実部は, その虚数部より $\ln\omega$ の因子だけ早く増大する. これは考えがたい. なぜなら, 3.7 節では前方散乱振幅の実部は $\omega\to\infty$ のときにその虚部より非常に小さくなると期待され, これは実験でも確認されている. したがって, もし, $\sigma_{\alpha+B}(E)$ と $\sigma_{\alpha+B^c}(E)$ が $E\to\infty$ のときに定数と $(\ln E)^r$ の積のように振舞うならば, その定数は同じでなければならないと結論できる. ここでは高エネルギー極限を考えるので, この結果は B の質量がゼロかどうかに依らない. したがって, 同じ意味で, どんな粒子とその反粒子の固定標的での散乱断面積の比も, 高エネルギーで 1 に近づく. この結果はポメランチェック (Pomeranchuk) の定理[16]として知られているものを幾分一般化したものだ. (ポメランチェックは $r=0$ の場合だけを考えた. しかし, 3.7 節の議論と断面積の実験結果から, $r=2$ の方がよりもっともらしいと考えられる.)

ポメラチェックは散乱振幅の漸近的振舞いを 3.7 節と同様の議論を使って評価したが, 今日では, 漸近的振舞いは通常レッジェ極理論から推論される.[17] この詳細に立ち入るのは主題から離れ過ぎるのでやめておく. ただ, ここでは, ハドロン過程では ω が無限大に近づくとき

の $f(\omega)$ の振舞いは, $\omega^{\alpha_n(0)}$ に比例する項の和で与えられることだけを述べておく. ここで, $\alpha_n(t)$ は衝突過程での無限個の1ハドロン状態の組の交換を表す「レッジェ軌跡」と呼ばれるものだ. ハドロン・ハドロン散乱での主要な軌跡 (実際には, 多くの軌跡の複合体) は $\alpha(0)$ が1に近い「ポメロン」(Pomeron) だ. $E \to \infty$ で近似的に一定の断面積を与えるのはこの軌跡だ. ポメランチェックの定理によれば, ポメロンはどのハドロンとの結合もそのハドロンの反粒子との結合に等しい. ハドロン状態のスペクトルから低いレッジェ軌跡の $\alpha_n(0)$ を求めることができる. スピン j の中間子共鳴が質量 m を持つために必要ではあるが十分ではない条件[18] は, 軌跡のうちの一つの $\alpha_n(t)$ が j に等しいときの t に, m^2 が等しいということだ. ポメロン以外には, パイオン・核子散乱の主要軌跡は, $j = 1$ の ρ 中間子が $m = 770$ MeV にあり, $j = 3$ の g 中間子が, $m = 1690$ MeV にあり, $j = 5$ の中間子が $m = 2350$ MeV にある軌跡だ. これらの $\alpha(t)$ の値を $t = 0$ にまで外挿すると, この軌跡が $\alpha(0) \approx 0.5$ であることが求まる. この軌跡は, π^+ と π^- とに反対符号で結合するので, パイオン・核子散乱では, $f(\omega) - f^c(\omega)$ がほぼ $\sqrt{\omega}$ のように振舞うことが期待される.

光子散乱では, B と B^c の間に違いが無いので, (10.8.27) から $b = 0$ となり, (10.8.26) は,

$$f(\omega) = a + \frac{\omega^2}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sigma(E)}{E^2 - \omega^2}dE \qquad (10.8.29)$$

を与える. これが本質的に, もとのクラマース・クローニッヒ (Kramers–Kronig)[13] 関係だ. 13.5 節でみるように, 電荷 e で質量 m の標的については, 定数 a は $\mathrm{Re}\, f(0) = -e^2/m$ という値を持つことが知られている.

問題

1. 中性ベクトル場 $v_\mu(x)$ を考える．場が正しくくりこまれて，くりこまれた質量 m の粒子を記述するには，2本のベクトル場の外線を持つ1粒子既約なダイアグラムの和 $\Pi^*_{\mu\nu}(k)$ にはどのような条件を課さなければならないか？このためには，ラグランジアンで自由場と相互作用項をどのように分けなければならないか？

2. 荷電スカラー場の電磁頂点関数を支配する一般ワード恒等式を導け．

3. スピン $\frac{1}{2}$ で質量が m_1 と m_2 と異なり，パリティは等しい1粒子状態間の電流 $J^\mu(x)$ の行列要素 $\langle \mathbf{p}_2\sigma_2|J^\mu(x)|\mathbf{p}_1\sigma_1\rangle$ の最も一般的な形は何か？パリティが異なるときはどうなるか？(パリティは終始保存するとせよ.)

4. 真空期待値 $\langle T\{J^\mu(x)\ J^\nu(y)^\dagger\}\rangle_0$ のスペクトル (チェレン・レーマン) 表示を求めよ．ただし，ここでは $J^\mu(x)$ は複素保存カレントとする．

5. 真空期待値 $\langle T\{\psi_n(x)\ \bar{\psi}_m(y)\}\rangle_0$ のスペクトル (チェレン・レーマン) 表示を求めよ．ただし，$\psi(x)$ はディラック場とする．

6. 散乱振幅や断面積の漸近的振舞いについてなんら仮定を用いずに，光子の前方散乱振幅が引き算の無い分散関係を満たすことが不可能であることを証明せよ．

7. 分散理論の方法を用いて，複素スカラー場についてスペクトル (チェレン・レーマン) 表示を求めよ．

8. 分散理論と8.7節の結果を使って，電子の静止系で e^4 の次数まで光子・電子の前方散乱振幅を求めよ．

参考文献

1. W. H. Furry, *Phys. Rev.* **51**, 125 (1937).

2. H. Yukawa, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* **17**, 48 (1935).

3. H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmerman, *Nuovo Cimento* **1**, 205 (1955).

4. Y. Takahashi, *Nuovo Cimento*, Ser. 10, **6**, 370 (1957).

5. J. C. Ward, *Phys. Rev.* **78**, 182 (1950).

6. J. Schwinger, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 296 (1959).

7. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A117**, 610 (1928).

8. M. N. Rosenbluth, *Phys. Rev.* **79**, 615 (1950).

9. G. Källen, *Helv. Phys. Acta* **25**, 417 (1952); *Quantum Electrodynamics* (Springer-Verlag, Berlin, 1972); H. Lehmann, *Nuovo Cimento* **11**, 342 (1954).

10. J. C. Howard and B. Jouvet, *Nuovo Cimento* **18**, 466 (1960); M. J. Vaughan, R. Aaron, and R. D. Amado, *Phys. Rev.* **1254**, 1258 (1961); S. Weinberg, *Proceedings of the 1962 High-Energy Conference at CERN* (CERN, Geneva, 1962) p. 683.

11. R. L. Stratonovich, *Sov. Phys. Dokl.* **2**, 416 (1957); J. Hubbard, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 77 (1959).

12. S. Weinberg, *Phys. Rev.* **137**, B672 (1965).

13. H. A. Kramers, *Atti Congr. Intern. Fisici, Como* (Nicolo Zanichellli, Bologna, 1927). これは H. A. Kramers, *Collected*

Scientific Papers (North-Holland, Amsterdam, 1956) にも収録されている. R. de Kronig, *Ned. Tyd. Nat. Kunde* **9**, 402 (1942); *Physica* **12**, 543 (1946); J. S. Toll, The Dispersion Relation for Light and its Application to Problems Involving Electron Pairs, プリストン大学博士論文 (1952). 歴史的なまとめとしては, J. D. Jackson in *Dispersion Relations*, G. R. Screaton 編 (Oliver and Boyd, Edinburgh, 1961), M. L. Goldberger in *Dispersion Relations and Elementary Particles*, C. De Witt and R. Omnes 編 (Hermann, Paris, 1960) を見よ.

14. M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, and W. Thirring, *Phys. Rev.* **95**, 1612 (1954). この結果の非摂動論的性質は M. L. Goldberger, *Phys. Rev.* **97**, 508 (1955) で示された.

15. M. L. Goldberger, *Phys. Rev.* **99**, 979 (1955).

16. I. Ia. Pomeranchuk, *J. Expt. Theor. Phys. (USSR.)* **34**, 725 (1958). 英語版は, *Soviet Physics - JETP* **34**(7), 499 (1958). 一般化については, S. Weinberg, *Phys. Rev.* **124**, 2049 (1961) を見よ.

17. たとえば, P. D. B. Collins, *An Introduction to Regge Theory and High Energy Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1977) を見よ. 原論文は, T. Regge, *Nuovo Cimento* **14**, 951 (1959): **18**, 947 (1960) にある.

18. スピンと質量の 2 乗のグラフはチュー・フラウチ図として知られている. G. F. Chew and S. C. Frautschi, *Phys. Rev. Lett.* **8**, 41 (1962) を見よ.

第11章

量子電磁理論の 1ループ輻射補正

この章では, 荷電レプトン, すなわち質量がゼロでないスピン $\frac{1}{2}$ 粒子が電磁場のみと相互作用する理論における典型的な 1 ループの計算をいくつか行う. レプトンには, 電子, ミュー中間子, そしてそれらより後になって発見されたタウ中間子の 3 種類または 3「フレーバー (flavor)」が知られている. 議論をはっきりさせるために, ここでの計算では荷電粒子を「電子」と呼ぶことにするが, ほとんどの計算はミュー中間子とタウ中間子にも同様に当てはまる. 11.1 節でいくつかの一般論を述べた後, 11.2 節の真空偏極の計算, 11.3 節の電子の異常磁気モーメントの計算, 11.4 節の電子の自己エネルギーの計算と進む. その途中で, そのような計算に有用ないくつかの数学的技法を導入する. それには, ファインマン・パラメータ, ウィックの回転, そして, ト・フーフトとベルトマン (Veltman) の次元正則化法と旧式なパウリとビラース (Villars) の正則化法の両方が含まれる. 計算結果には無限大が現れるが, くりこまれた電荷と質量を使って表わせば最終的な結果は有限になることを見る. 次の章では, この章でくりこみにつ

いて学んだことを摂動論の任意の次数での一般論に拡張する.

11.1 相殺項

電子と光子のラグランジアン密度は以下の形を取る.*

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}\, F_{\rm B}^{\mu\nu} F_{B\,\mu\nu} - \bar{\psi}_{\rm B} \Big[\gamma_\mu \left[\partial^\mu + ie_{\rm B} A_{\rm B}^\mu\right] + m_{\rm B}\Big] \psi_{\rm B}\ . \tag{11.1.1}$$

ここで, $F_{\rm B}^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A_{\rm B}^\nu - \partial^\nu A_{\rm B}^\mu$, また $A_{\rm B}^\mu$ と $\psi_{\rm B}$ は光子と電子の裸の (すなわちくりこまれていない) 場, $-e_{\rm B}$ と $m_{\rm B}$ は電子の裸の電荷と質量だ. 前の章で述べたように, くりこまれた場と電荷と質量を次のように導入する.

$$\psi \equiv Z_2^{-1/2} \psi_{\rm B}\ , \tag{11.1.2}$$

$$A^\mu \equiv Z_3^{-1/2} A_{\rm B}^\mu\ , \tag{11.1.3}$$

$$e \equiv Z_3^{+1/2} e_{\rm B}\ , \tag{11.1.4}$$

$$m \equiv m_{\rm B} + \delta m\ . \tag{11.1.5}$$

ここで, 定数 $Z_2, Z_3, \delta m$ は, くりこまれた場のプロパゲーターが相互作用のない自由場のプロパゲーターと同じ位置で極を持ち留数も等しくなるように調整する. すると, ラグランジアンはくりこまれた量を用いて次のように書ける.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2\ . \tag{11.1.6}$$

ここで,

$$\mathcal{L}_0 = -\tfrac{1}{4}\, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \bar{\psi} \Big[\gamma_\mu\, \partial^\mu + m\Big] \psi\ , \tag{11.1.7}$$

$$\mathcal{L}_1 = -ieA_\mu \bar{\psi}\, \gamma^\mu \psi\ , \tag{11.1.8}$$

---

*この章ではハイゼンベルグ表示と相互作用表示の間の変換は行わないので, 通常使われる記法に戻って, 大文字の A と小文字の ψ をそれぞれ光子と荷電粒子の場を表わすのに使う.

また, $\mathcal{L}_2$ は「相殺項」の和だ.

$$\mathcal{L}_2 = -\tfrac{1}{4}\,(Z_3-1)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - (Z_2-1)\bar{\psi}\left[\gamma_\mu\,\partial^\mu + m\right]\psi$$
$$+Z_2\delta m\bar{\psi}\,\psi - ie(Z_2-1)A_\mu\bar{\psi}\,\gamma^\mu\psi\,. \tag{11.1.9}$$

$\mathcal{L}_2$ の全ての項は e について 2 次以上であり, ループ・ダイアグラムから生じる紫外発散を相殺するにはこれらの項だけで十分なことが後でわかる.

11.2 真空偏極

ループ・ダイアグラムを含む輻射補正の最初の計算を, いわゆる真空偏極の効果の計算から始める. これは, 内線光子のプロパゲーターへの補正のことだ. 真空偏極は, 水素原子のエネルギー準位に測定可能なずれを引き起こし, 重い原子核のまわりの原子軌道に束縛されたミュー中間子のエネルギーに重要な補正を生じる. また, 3 巻で見るように, 真空偏極の計算は電磁理論やその他のゲージ理論の高エネルギーでの振舞いの計算で重要な要素になる.

10.5 節と同様に, $i(2\pi)^4\Pi^{*\rho\sigma}(q)$ を, 偏極の添字 μ と ν を持つ 2 本の光子の外線を持ち, 出入りする 4 元運動量が q の全ての連結ダイアグラムの和として定義する. これは, 2 本の外線に対応する光子のプロパゲーターは含まない. またアスタリスク (*) はどれか 1 本の光子の内線を切ると非連結にできるダイアグラムは除くことを意味する. 完全な光子のプロパゲーター $\Delta'^{\mu\nu}(q)$ は (10.5.13) で与えられる.

$$\Delta' = \Delta\left[1 - \Pi^*\Delta\right]^{-1}\,. \tag{11.2.1}$$

ここで $\Delta^{\mu\nu}(q)$ は輻射補正のない光子のプロパゲーターだ. ここでは $\Pi^{*\rho\sigma}(q)$ への主要な寄与を計算する.

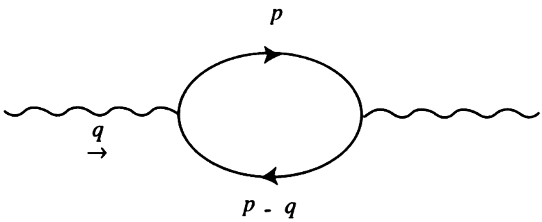


図 11.1: 量子電磁理論の真空偏極の 1 ループ・ダイアグラム. 波線は光子を, 矢印のついた線は電子を表わす.

最低次では Π^* に図 11.1 のダイアグラムに対応する 1 ループの寄与がある.

$$i(2\pi)^4\Pi^{*\rho\sigma}_{1\,\mathrm{loop}}(q) = -\int d^4p\,\mathrm{Tr}\left\{\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\,\frac{-i\not{p}+m}{p^2+m^2-i\epsilon}\right]\right.$$
$$\left.\times\left[(2\pi)^4e\gamma^\rho\right]\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\,\frac{-i(\not{p}-\not{q})+m}{(p-q)^2+m^2-i\epsilon}\right]\left[(2\pi)^4e\gamma^\sigma\right]\right\}. \tag{11.2.2}$$

ここで, 右辺の最初の負符号はフェルミオン・ループの存在から要求されるものだ. 簡単化して書くとこれは次のようになる.

$$\Pi^{*\rho\sigma}_{1\,\mathrm{loop}}(q) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{\mathrm{Tr}\left\{[-i\not{p}+m]\gamma^\rho\left[-i(\not{p}-\not{q})+m\right]\gamma^\sigma\right\}}{(p^2+m^2-i\epsilon)\left((p-q)^2+m^2-i\epsilon\right)}. \tag{11.2.3}$$

この積分を実行するためにまず, ファインマン[1]が導入した技法を使う. 基本公式,

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[(1-x)A+xB]^2} \tag{11.2.4}$$

を用いて, (11.2.3) のスカラーのプロパゲーターの積を以下のように書く.

$$\frac{1}{(p^2+m^2-i\epsilon)((p-q)^2+m^2-i\epsilon)}$$

$$= \int_0^1 \left[(p^2+m^2-i\epsilon)(1-x) + \left((p-q)^2+m^2-i\epsilon\right)x\right]^{-2} dx$$
$$= \int_0^1 \left[p^2+m^2-i\epsilon-2p\cdot qx+q^2x\right]^{-2} dx$$
$$= \int_0^1 \left[(p-qx)^2+m^2-i\epsilon+q^2x(1-x)\right]^{-2} dx\ .$$

(これはこの章の補遺で与える積分の特別な場合だ.) 運動量空間での積分変数を,

$$p \to p + qx$$

とずらして,* (11.2.3) を,

$$\Pi^{*\rho\sigma}_{1\,\mathrm{Loop}}(q) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx \int d^4p\left[p^2+m^2-i\epsilon+q^2x(1-x)\right]^{-2}$$
$$\times\ \mathrm{Tr}\left\{\left[-i(\not{p}+\not{q}x)+m\right]\gamma^\rho\left[-i\left(\not{p}-\not{q}(1-x)\right)+m\right]\gamma^\sigma\right\} \tag{11.2.5}$$

とすることができる. 8 章の補遺の結果を使うと, ここでのトレースは簡単に計算できて, 以下を得る.

$$\mathrm{Tr}\left\{\left[-i(\not{p}+\not{q}x)+m\right]\gamma^\rho\left[-i\left(\not{p}-\not{q}(1-x)\right)+m\right]\gamma^\sigma\right\}$$
$$= 4\Big[-(p+qx)^\rho\left(p-q(1-x)\right)^\sigma + (p+qx)\cdot\left(p-q(1-x)\right)\eta^{\rho\sigma}$$
$$-(p+qx)^\sigma\left(p-q(1-x)\right)^\rho + m^2\eta^{\rho\sigma}\Big]\ . \tag{11.2.6}$$

次に**ウィック回転** (Wick rotation)[2]と呼ばれる手順に進む. $-q^2 < 4m^2$ である限り, $m^2+q^2x(1-x)$ は 0 から 1 までのすべての x について正であり, (11.2.5) の被積分関数の極は,

$$p^0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2+q^2x(1-x)-i\epsilon}$$

---

*厳密に言うと, この操作は積分が収束する場合にのみ正しい. 原理的には, 変数をずらすことを正当化するには, 後で述べる次元正則化法のような, 全ての積分を収束させる何らかの正則化法を導入しなければならない.

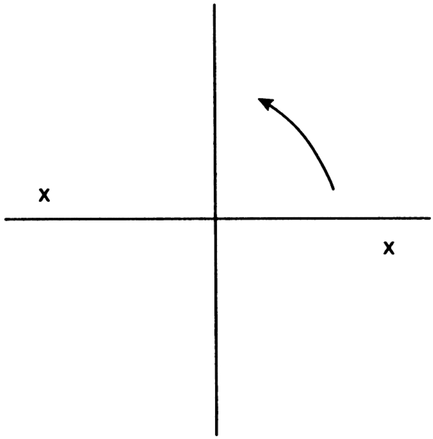


図 11.2: p^0 の積分路のウィック回転. 小さい 'x' は p^0 の複素平面の極を表わす. 矢印は p^0 の実軸から虚軸への積分路の回転方向を示す.

すなわち, 負の実軸のわずかに上と, 正の実軸のわずかに下にある. (図 11.2 を見よ.) p^0 の積分路をこれらの極のどちらも横切らずに反時計回りに回転させることができる. この結果, p^0 を実軸上の $-\infty$ から $+\infty$ まで積分する代わりに, 虚軸上の $-i\infty$ から $+i\infty$ まで積分すればよい. つまり, $p^0 = ip^4$ と書いて, p^4 を実数値で $-\infty$ から $+\infty$ まで積分するようにできる. (もし, $-i\epsilon$ ではなく $i\epsilon$ がプロパゲーターの分母に現れていたなら, $p^0 = -ip^4$ とおき, p^4 について実数値で $-\infty$ から $+\infty$ まで積分したであろう. これは $\Pi^{*\rho\sigma}_{1\text{ loop}}(q)$ の符号を変える.) そうすると, (11.2.5) は次のようになる.

$$\Pi^{*\rho\sigma}_{1\text{ loop}}(q) = \frac{4e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx \int (d^4p)_E \left[p^2+m^2+q^2x(1-x)\right]^{-2}$$
$$\times\Big[-(p+qx)^\rho(p-q(1-x))^\sigma + (p+qx)\cdot(p-q(1-x))\,\eta^{\rho\sigma}$$
$$-(p+qx)^\sigma(p-q(1-x))^\rho + m^2\eta^{\rho\sigma}\Big]. \qquad (11.2.7)$$

ここで,

$$(d^4p)_E = dp^1dp^2dp^3dp^4$$

で, 全てのスカラー積はユークリッドの内積,

$$a \cdot b = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3 + a^4b^4$$

を使って評価する. ここで, $q^4 \equiv -iq^0$ と理解する. また, $\eta^{\rho\sigma}$ は添字を 1, 2, 3, 4 として, クロネッカー・デルタとしてもよいし, 添字を 1, 2, 3, 0 として通常のミンコフスキー・テンソルとしてもよい.

積分 (11.2.7) はひどく発散する. 実際には, 全ての発散は相殺するが, このことを見るには計算の途中段階では積分を有限にするある種の正則化の技法を使う必要がある. 単にある最大運動量 Λ で積分を切断して $p^2 < \Lambda^2$ を満たす p^μ 上でだけ積分するのではうまくいかない. なぜなら, これは電子のプロパゲーターに階段関数 $\theta(\Lambda^2 - p^2)$ を導入することになるが, ワードの恒等式 (10.4.25) によればゲージ不変性を保つためには電子のプロパゲーターを変更すれば電子・光子頂点も変更しなければならないからだ. 実際, 通常の切断 Λ では輻射補正により光子に質量が生じ, これは明らかにゲージ不変性の要求を破る.

ゲージ不変性を損なうことなく発散積分を正則化するには, 経験的には, ト・フーフトとベルトマン[3]が 1972 年に導入した, 時空次元を 4 から任意の数 d に解析接続する次元正則化の方法が最も便利だ. これは (11.2.7) のような積分で角度平均を実行する際に, p について奇数次の項を全て落とし, また p について偶数次の項は以下の置き換えをすることだ.**

$$p^\mu p^\nu \to p^2\eta^{\mu\nu}\Big/d\,, \tag{11.2.8}$$

$$p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma \to (p^2)^2[\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}]\Big/d(d+2)\,.$$

** これらの表現を最も簡単に導くには, その形はローレンツ不変性と μ, ν, ρ 等の添字の間の対称性から決まることに気付けばよい. 因子は η で縮約したときに両辺が同じ結果になることを要請すればわかる.

(11.2.9)

また, このようにして被積分関数を p^2 のみの関数で書いた後, 体積要素 d^4p_E は $\Omega_d\kappa^{d-1}d\kappa$ で置き換える. ここで, $\kappa\equiv\sqrt{p^2}$ で, Ω_d は d 次元単位球の表面積だ.

$$\Omega_d = 2\pi^{d/2}\Big/\Gamma(d/2)\,. \tag{11.2.10}$$

積分 (11.2.7) は複素時空次元 d で収束する. 積分を複素数の d から $d=4$ に解析接続することができ, そのとき無限大が $(d-4)^{-1}$ の因子として再現する.

積分 (11.2.7) に次元正則化を施すと,

$$\Pi^{*\rho\sigma}_{1\,\text{loop}}(q) = \frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\int_0^\infty \kappa^{d-1}d\kappa\left[\kappa^2+m^2+q^2x(1-x)\right]^{-2}$$
$$\times\left[\frac{-2\kappa^2}{d}\eta^{\rho\sigma}+2q^\rho q^\sigma x(1-x)+\Big(\kappa^2-q^2x(1-x)\Big)\eta^{\rho\sigma}+m^2\eta^{\rho\sigma}\right]$$

が得られる. κ 積分は任意の複素数の d (あるいは偶整数を除く任意の実数 d) について実行できる. よく知られた公式 (この章の補遺でもっと一般的な形で与えてある),

$$\int_0^\infty \kappa^{d-1}[\kappa^2+\nu^2]^{-2}d\kappa = \tfrac{1}{2}\,(\nu^2)^{\frac{d}{2}-2}\,\Gamma(d/2)\;\Gamma(2-d/2)\;, \tag{11.2.11}$$

$$\int_0^\infty \kappa^{d+1}[\kappa^2+\nu^2]^{-2}d\kappa = \tfrac{1}{2}\,(\nu^2)^{\frac{d}{2}-1}\Gamma(1+d/2)\,\Gamma(1-d/2) \tag{11.2.12}$$

を使うと,

$$\Pi^{*\rho\sigma}_{1\,\text{loop}}(q) = \frac{2e^2\Omega_d}{(2\pi)^4}$$
$$\times\int_0^1 dx\Bigg[(1-2/d)\,\eta^{\rho\sigma}\left(m^2+q^2x\,(1-x)\right)^{\frac{d}{2}-1}\Gamma\,(1+d/2)\,\Gamma\,(1-d/2)$$
$$+\;\left(2q^\rho q^\sigma x(1-x)-q^2\eta^{\rho\sigma}x(1-x)+m^2\eta^{\rho\sigma}\right)\left(m^2+q^2x(1-x)\right)^{\frac{d}{2}-2}$$
$$\times\,\Gamma\,(d/2)\,\Gamma\,(2-d/2)\Bigg]$$

が得られる. 式,

$$(1-2/d)\,\Gamma\,(1+d/2)\,\Gamma\,(1-d/2) = -\Gamma\,(d/2)\,\Gamma\,(2-d/2)$$

を使うと被積分関数の二つの項を以下のようにまとめることができる.

$$\Pi^{*\rho\sigma}_{1\ \mathrm{loop}}(q) = \frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4}\,\Gamma\,(d/2)\,\Gamma\,(2-d/2)\,(q^\rho q^\sigma - q^2\eta^{\rho\sigma}) \times \int_0^1 dx\, x(1-x)(m^2+q^2x(1-x))^{\frac{d}{2}-2}\,. \tag{11.2.13}$$

この $\Pi^{*\rho\sigma}$ への寄与は関係式,

$$q_\rho \Pi^{*\rho\sigma}_{1\ \mathrm{loop}}(q) = 0 \tag{11.2.14}$$

を満たすという非常に重要な結果に気付く. この結果は 10.5 節で, 電流が保存することと中性であることから導かれた. 次元正則化法を採用したのはまさにこの結果を得るためだった. 次元正則化によりこの結果が得られた理由は, 電流の保存は時空間の次元には依らないからだ.

(11.2.13) のガンマ関数 $\Gamma(2-d/2)$ は $d \to 4$ で発散する. さいわい, 11.1 節で見たように, $\Pi^{*\rho\sigma}(q)$ には別の項を加えなければならない. それは相互作用ラグランジアンの $-\frac{1}{4}(Z_3-1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ の項からくる. この項は (11.2.13) と同様の構造をしており,

$$\Pi^{*\rho\sigma}_{\mathcal{L}_2}(q) = -(Z_3-1)(q^2\eta^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma) \tag{11.2.15}$$

よって e^2 までの次数では完全な Π^* は次の形をしている.

$$\Pi^{*\rho\sigma}(q) = (q^2\eta^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma)\pi(q^2)\,. \tag{11.2.16}$$

ここで, $\pi(q^2)$ は以下で与えられる.

$$\pi(q^2) = -\frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4}\,\Gamma\left(\tfrac{d}{2}\right)\Gamma\left(2-\tfrac{d}{2}\right) \times \int_0^1 dx\, x(1-x)(m^2+q^2x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} - (Z_3-1)\,. \tag{11.2.17}$$

10.5 節で見たように, くりこまれた電磁場の定義より, (完全な光子のプロパゲーターの $q^2=0$ の極での留数が, ゲージに依存する項を除いて, 裸のプロパゲーターのものと等しくなるためには) $\pi(0)=0$ が要求される. したがって, e^2 までの次数では,

$$Z_3 = 1 - \frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4}\Gamma\left(\tfrac{d}{2}\right)\Gamma\left(2-\tfrac{d}{2}\right)(m^2)^{\frac{d}{2}-2}\int_0^1 x(1-x)dx \quad (11.2.18)$$

となり, よって,

$$\begin{aligned}\pi(q^2) = &-\frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4}\Gamma\left(\tfrac{d}{2}\right)\Gamma\left(2-\tfrac{d}{2}\right)\int_0^1 dx\, x(1-x)\\ &\times\left[\left(m^2+q^2x(1-x)\right)^{\frac{d}{2}-2}-(m^2)^{\frac{d}{2}-2}\right] \end{aligned}\quad (11.2.19)$$

が得られる.

いまや正則化を取り除いて, d が物理的な値 $d=4$ に近づくことが許される. 以前に述べたように, 1 ループの寄与には無限大が存在し, それはガンマ関数の極限での振舞い,

$$\Gamma\left(2-\tfrac{d}{2}\right) \to \frac{1}{(2-d/2)} - \gamma$$

から生じる. ここで γ はオイラー定数 $\gamma=0.5772157$ だ. Z_3-1 の発散部分は $\Gamma(2-d/2)$ を $1/(2-d/2)$ と置いて, それ以外の全ての d を 4 と置けば得られる.

$$(Z_3-1)_\infty = -\frac{4e^2\cdot 2\pi^2}{6(2\pi)^4}\,\frac{1}{2-d/2} = \frac{e^2}{6\pi^2}\,\frac{1}{d-4}\,. \quad (11.2.20)$$

3 巻で見るように, この結果を使って, 電荷についてのくりこみ群方程式の主要な項を導くことできる.

$d=4$ の極は $\pi(q^2)$ の中で明らかに相殺する. なぜなら, $d=4$ で $(m^2+q^2x(1-x))^{\frac{d}{2}-2}$ と $(m^2)^{\frac{d}{2}-2}$ はともに同一の極限 1 をとるからだ. 同じ理由で, $\Gamma(2-d/2)$ の $-\gamma$ の項は, Z_3-1 には有限の寄与をするが, $\pi(q^2)$ の全体では相殺する. Z_3-1 へは, $\Gamma(2-d/2)$ の極と

$\Omega_d\Gamma(d/2)$ の $d=4$ のまわりでの展開の 1 次項との積からくる別の有限な寄与がある. しかし, これもまた $\pi(q^2)$ 全体では相殺する. 実際, 次元正則化を行うときに $(2\pi)^{-4}$ を $(2\pi)^{-d}$ で置き換え, 因子 $\mathrm{Tr}\,1=4$ を任意の偶数時空次元 d でのガンマ行列の次数 $2^{d/2}$ で置き換えることもできたが, これらもまた Z_3-1 の有限部分には寄与するが, $\pi(q^2)$ には寄与しない. さらに, e^2 は d に依らないと考えることはできない. なぜなら, (11.2.13) を見れば分かるように, それは d に依存する [質量]$^{4-d}$ の次元を持つ. もし μ を質量の単位を持つ量として, $e^2 \propto \mu^{4-d}$ ととれば, Z_3-1 にはさらに有限な項が存在する. これは $\Gamma(2-d/2)$ の極と, μ^{4-d} を $4-d$ の冪で展開した $(4-d)\ln\mu$ の項との積から生じる. しかし, この場合も Z_3-1 と $\pi(q^2)$ への 1 ループの寄与とが相殺する.

$d\to 4$ の極限で $\pi(q^2)$ に本当に寄与する唯一の項は $\Gamma(2-d/2)$ の極と $(m^2+q^2x(1-x))^{\frac{d}{2}-2}$ および $(m^2)^{\frac{d}{2}-2}$ の $d-4$ についての展開の 1 次項との積からくるものだ.

$$(m^2+q^2x(1-x))^{\frac{d}{2}-2}-(m^2)^{\frac{d}{2}-2}\to(\tfrac{d}{2}-2)\ln\left(1+\frac{q^2x(1-x)}{m^2}\right). \tag{11.2.21}$$

これは最終的に,

$$\pi(q^2)=\frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1 x(1-x)\ln\left(1+\frac{q^2x(1-x)}{m^2}\right)dx \tag{11.2.22}$$

を与える.

真空偏極の物理的な意味はスピン $\frac{1}{2}$ の 2 個の荷電粒子の散乱への効果を考察することによって調べることができる. 図 11.3 のファインマン・ダイアグラムは散乱 S 行列要素に以下の形の寄与をする.

$$S_a(1,2\to 1',2')=(2\pi)^{-12/2}\delta^4(p_{1'}+p_{2'}-p_1-p_2)\Big[e_1(2\pi)^4\bar{u}_{1'}\gamma^\mu u_1\Big]$$
$$\times\Big[-i(2\pi)^{-4}\frac{1}{q^2}\Big]\Big[e_2(2\pi)^4\bar{u}_{2'}\gamma_\mu u_2\Big],$$

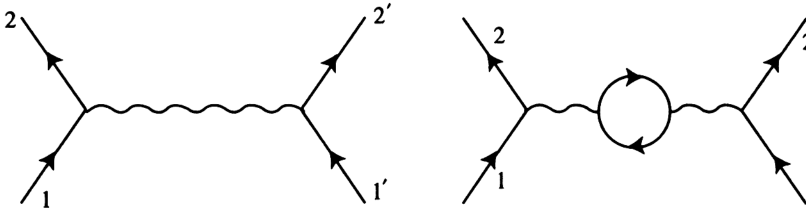


図 11.3: 荷電粒子の散乱の二つのダイアグラム. ここで矢印付きの線は荷電粒子で, 波線は光子だ. ダイアグラム (b) は樹木近似のダイアグラム (a) への最低次の真空偏極の補正を表わす.

$$S_b(1,2\to 1',2') = (2\pi)^{-12/2}\delta^4(p_{1'}+p_{2'}-p_1-p_2)\Big[e_1(2\pi)^4\bar{u}_{1'}\gamma^\mu u_1\Big]$$
$$\times\left[-i(2\pi)^{-4}\frac{1}{q^2}\right]^2\Big[i(2\pi)^4(q^2\eta_{\mu\nu}+q_\mu q_\nu)\pi(q^2)\Big]\Big[e_2(2\pi)^4\bar{u}_{2'}\gamma^\nu u_2\Big]\,.$$

ここで e_1 と e_2 は散乱される 2 粒子の電荷で, $\pi(q^2)$ は (11.2.22) の e として図 11.3 のループを回る粒子の電荷の大きさを用いて計算する. また, q^μ は移行運動量 $q\equiv p_1-p_{1'}=p_{2'}-p_2$ だ. 保存の性質 $q_\mu\bar{u}_{1'}\gamma^\mu u_1=0$ を使って, 二つのダイアグラムは合わせて以下の S 行列要素を与える.

$$S_{a+b}(1,2\to 1',2') = \frac{-ie_1e_2}{4\pi^2q^2}\left[1+\pi(q^2)\right]\delta^4(p_{1'}+p_{2'}-p_1-p_2)$$
$$\times\Big[\bar{u}_{1'}\gamma^\mu u_1\Big]\Big[\bar{u}_{2'}\gamma_\mu u_2\Big]\,. \qquad (11.2.23)$$

非相対論的極限では $\bar{u}_{1'}\gamma^0u_1\simeq -i\delta_{\sigma_1'\sigma_1}$ および $\bar{u}_{1'}\gamma^iu_1\simeq 0$ であり, 粒子 2 についても同様だ. また, この極限で q^0 は $|\mathbf{q}|$ に比べて無視で

き, (11.2.23) は次のようになる.

$$S_{a+b}(1,2\to 1',2') = \frac{-ie_1e_2}{4\pi^2\mathbf{q}^2}\,[1+\pi(\mathbf{q}^2)]\;\delta^4(p_{1'}+p_{2'}-p_1-p_2)\delta_{\sigma_1'\sigma_1}\delta_{\sigma_2'\sigma_2}\,. \tag{11.2.24}$$

これは, スピンに依らない中心力ポテンシャル $V(r)$ によるボルン近似での以下の S 行列と比較できる.

$$S_{\text{Born}}(1,2\to 1',2') = -2\pi i\delta(E_{1'}+E_{2'}-E_1-E_2)T_{\text{Born}}(1,2\to 1',2')\,, \tag{11.2.25}$$

$$T_{\text{Born}}(1,2\to 1',2') = \delta_{\sigma_1'\sigma_1}\delta_{\sigma_2'\sigma_2}\int d^3x_1\int d^3x_2\;V\Big(|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|\Big) \times (2\pi)^{-12/2}e^{-i\mathbf{p}_{1'}\cdot\mathbf{x}_1}e^{-i\mathbf{p}_{2'}\cdot\mathbf{x}_2}e^{i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}_1}e^{i\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}_2}\,. \tag{11.2.26}$$

ここで $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2+\mathbf{r}$ と置くと,

$$S_{\text{Born}} = \frac{-i}{4\pi^2}\delta^4(p_{1'}+p_{2'}-p_1-p_2)\delta_{\sigma_1'\sigma_1}\delta_{\sigma_2'\sigma_2} \times\int d^3r\;V(r)\,e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tag{11.2.27}$$

が得られる. これを (11.2.23) と比べると, 非相対論的極限で図 11.3 のダイアグラムは以下のポテンシャル $V(r)$ によるものと同じ S 行列要素を生じることがわかる.

$$\int d^3r\;V(r)\,e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = e_1e_2\frac{1+\pi(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2}\,.$$

あるいは, フーリエ逆変換をすれば,

$$V(r) = \frac{e_1e_2}{(2\pi)^3}\int d^3q\;e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\;\left[\frac{1+\pi(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2}\right] \tag{11.2.28}$$

となる. (11.2.28) は輻射補正の最低次まででは, 距離 r だけ離れた二つの拡がった電荷分布 $e_1\eta(\mathbf{x})$ と $e_2\eta(\mathbf{y})$ との静電相互作用により生じるのと同じ以下のポテンシャル・エネルギーだ.

$$V(|\mathbf{r}|) = e_1e_2\int d^3x\int d^3y\;\frac{\eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{r}|}\,. \tag{11.2.29}$$

ここで $\eta(\mathbf{r})$ は次のとおりだ.

$$\eta(\mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r}) + \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d^3q\ \pi(\mathbf{q}^2)\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\ . \tag{11.2.30}$$

ここで,

$$\int d^3r\ \eta(\mathbf{r}) = 1 + \tfrac{1}{2}\ \pi(0) = 1 \tag{11.2.31}$$

なので, クーロン・ポテンシャルの長距離部分から決まる粒子 1 と 2 の全電荷は, くりこまれた電磁場の相互作用をつかさどる定数 e_1 と e_2 に等しいということに気付く.

$|\mathbf{r}| \neq 0$ のとき, 積分 (11.2.30) は簡単な曲線積分によって計算できる.

$$\eta(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{8\pi^3 r^3}\int_0^1 x(1-x)\,dx \left[1 + \frac{mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right]\exp\left(\frac{-mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right)\ .$$

これはあらゆる点で負だ. しかし, すでに見たように $\eta(\mathbf{r})$ を全ての $\mathbf{r}$ について積分すると +1 になる. よって, $\eta(\mathbf{r})$ は $\mathbf{r}=0$ で特異な項 $(1+L)\delta^3(\mathbf{r})$ を含まねばならない. ここで, L は (11.2.31) を満たすように,

$$L = \frac{e^2}{8\pi^3}\int \frac{d^3r}{r^3}\int_0^1 x(1-x)\,dx \left[1 + \frac{mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right]\exp\left(\frac{-mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right) \tag{11.2.32}$$

ととらなければならない. すると, 電荷分布関数の完全な表現は,

$$\eta(\mathbf{r}) = (1+L)\delta^3(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{8\pi^3 r^3}\int_0^1 x(1-x)\,dx \times \left[1 + \frac{mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right]\exp\left(\frac{-mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right) \tag{11.2.33}$$

になる. この結果の物理的解釈は次のとおりだ. 裸の点電荷は真空から逆符号の電荷の粒子を引きつけその反粒子を無限遠に押しやろうとするので, 裸の電荷は部分的に遮蔽されてくりこまれた電荷は因子

$1/(1+L)$ だけ小さくなる. 確認のため, 積分範囲を $r \geq a$ にだけ限ることで発散積分 (11.2.32) を切断すれば, $a \to 0$ のとき発散する部分は,

$$L_\infty = \frac{e^2}{12\pi^2} \ln a^{-1} \tag{11.2.34}$$

となる. よって, 運動量空間の切断 Λ を a^{-1} と同定すれば L の発散部分は $Z_3 - 1$ の発散部分と,

$$(Z_3 - 1)_\infty = -2L_\infty \tag{11.2.35}$$

で関係している. なぜなら, e^2 の次数まででくりこまれた電荷 (10.4.18) は,

$$e_\ell = Z_3^{1/2} e_{\mathrm{B}\ell} \simeq \left(1 + \tfrac{1}{2}\left(Z_3 - 1\right)\right) e_{\mathrm{B}\ell} \simeq (1+L)^{-1} e_{\mathrm{B}\ell} \tag{11.2.36}$$

で与えられるからだ. (11.2.35) は以下で確かめる.

真空偏極はミュー中間子原子のエネルギー準位に測定可能な効果をおよぼす. 14 章で見るように, 図 11.3 のファインマン・ダイアグラム (b) は波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ を持つ原子状態のエネルギーを,

$$\Delta E = \int d^3r\ \Delta V(\mathbf{r})\, |\psi(\mathbf{r})|^2 \tag{11.2.37}$$

だけずらす効果がある. ここで, $\Delta V(\mathbf{r})$ はポテンシャル (11.2.28) における摂動部分のことだ.

$$\Delta V(r) = \frac{e_1 e_2}{(2\pi)^3} \int d^3q\ e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \left[\frac{\pi(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2}\right] . \tag{11.2.38}$$

この摂動は $r \gg m^{-1}$ で指数関数的に小さくなる. 一方, 通常の原子内の電子の波動関数は一般にずっと大きな半径 $a \gg m^{-1}$ に集中している. 例えば, 電荷 Ze の原子核のまわりの電子の水素様原子軌道の場合は, $a = 137/Zm$ だ (ここでは $m = m_e$ だ). するとエネルギーのずれは波動関数の $r \ll a$ での振舞いのみに依存する. 軌道角運動量が ℓ

のとき, 波動関数は $r \ll a$ で r^ℓ のように振舞うので, (11.2.37) より ΔE は因子 $(ma)^{2\ell+3}$ に比例する. よって真空偏極の効果は, $\ell = 0$ の場合が, より大きな軌道角運動量の場合に比べてずっと大きい. $\ell = 0$ の場合, 波動関数は, r が m^{-1} 程度かそれより小さいとき定数 $\psi(0)$ に近似的に等しい. よって (11.2.37) は,

$$\Delta E = |\psi(0)|^2 \int d^3r \, \Delta V(\mathbf{r}) \tag{11.2.39}$$

となる. (11.2.38) と (11.2.22) を使うと, ポテンシャルのずれの積分は ($e_1 e_2 = -Ze^2$ のとき),

$$\int d^3r \, \Delta V(r) = -Ze^2 \pi'(0) = -\frac{4Z\alpha^2}{15m^2} \tag{11.2.40}$$

となる. また, $\ell = 0$ で主量子数が n の水素様原子の状態では原点の波動関数は,

$$\psi(0) = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{Z\alpha m}{n} \right)^{3/2} \tag{11.2.41}$$

なので, エネルギーのずれ (11.2.39) は,

$$\Delta E = -\frac{4Z^4\alpha^5 m}{15\pi n^3} \tag{11.2.42}$$

となる. 例えば, 水素原子の 2s 状態では, このエネルギーのずれは -1.122×10^{-7} eV であり, これは周波数のずれ $\Delta E/2\pi\hbar$ でいうと -37.13 MHz にあたる. これはウェーリング効果 (Uehling effect)[4] と呼ばれることがある. 1 章で説明したように, そのような小さなエネルギーのずれも測定可能になった. なぜなら, 種々の輻射補正がなければ純粋なディラック理論は, 水素原子の 2s 状態と 2p 状態が正確に縮退することを予言するからだ. 14 章で見るように, 2s 状態と 2p 状態の間の +1058 MHz の「ラム・シフト」の大部分は他の輻射補正からくるが, 理論と実験はよく一致していて, 真空偏極による -37.13 MHz のずれの存在を証明するのに十分だ.

真空偏極は通常の原子では輻射補正のわずかな部分にしか寄与しないが, ミュー中間子が軌道電子の代わりをするミュー中間子原子では輻射補正の主要な部分を占める. これはミュー中間子原子では, ほとんどの輻射補正は次元解析から m_μ に比例するエネルギーのずれをもたらすが, 電子のループによる積分された真空偏極のエネルギー $\int d^3r\,\Delta V$ は (11.2.40) のようにやはり m_e^{-2} に比例し, $m_\mu^3 m_e^{-2} = (210)^2 m_\mu$ に比例するエネルギーのずれを与えるからだ. しかし, この場合ミュー中間子原子の半径は電子のコンプトン波長よりずっと大きいということはなく, よって近似的な結果 (11.2.39) は真空偏極によるエネルギーのずれの大きさの程度を与えるにすぎない.

* * *

後の計算との比較のために, 積分 (11.2.7) を $\kappa = \Lambda$ で切断すれば, (11.2.20) の代わりに,

$$(Z_3 - 1)_\infty = -\frac{e^2}{6\pi^2}\int_\mu^\Lambda \kappa^{d-5}\,d\kappa = \frac{e^2}{6\pi^2}\frac{\mu^{d-4} - \Lambda^{d-4}}{d-4}$$

の形の積分を得ることを指摘しておく。. ここで μ は図 11.1 のループを回る荷電粒子の質量の程度の赤外有効切断だ. (この定数因子を求める最も簡単な方法は $d < 3$ で $\Lambda \to \infty$ のときこの表現の極限が (11.2.20) に一致するように要求することだ.) そのような紫外切断を導入すると, $d \to 4$ の極限に移行できて,

$$(Z_3 - 1)_\infty = -\frac{e^2}{6\pi^2}\ln(\Lambda/\mu) \tag{11.2.43}$$

を得る.

11.3 異常磁気モーメントと荷電半径

次の例として, 最低次の輻射補正による電子とミュー中間子の磁気モーメントと荷電半径のずれを計算しよう. 光子・レプトン頂点の 1

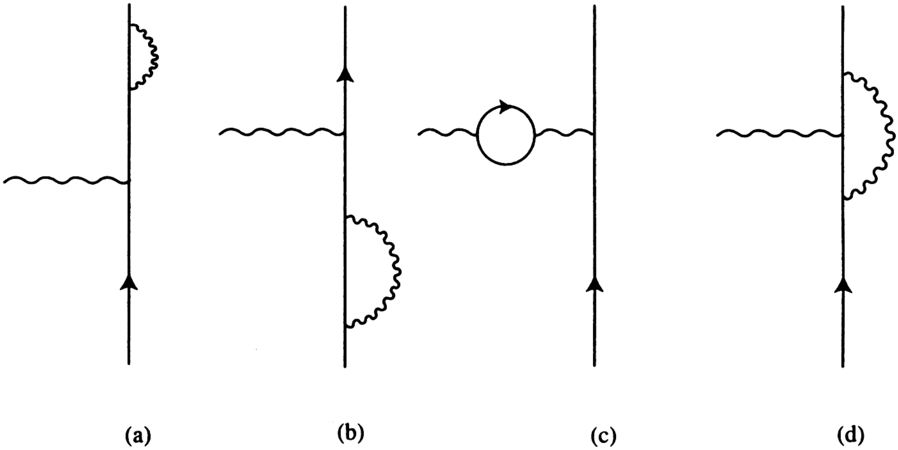


図 11.4: 光子・レプトンの頂点関数 Γ^μ の 1 ループ・ダイアグラム. ここで波線は光子を表わし, 他の線は電子かミュー中間子を表わす. ダイアグラム (a) と (b) はレプトン場のくりこみ項と相殺し, ダイアグラム (c) は 11.2 節で計算した真空偏極から生じ, (d) が 11.3 節で計算する項だ.

ループ・ダイアグラムとくりこみ補正を図 11.4 に示す. これらのダイアグラムのうち, 出入りするレプトンの線への挿入を含むダイアグラムは, 10.3 節で説明したようにレプトンが質量殻上にあるのでゼロになる. 光子の外線への挿入を含むダイアグラムは前の節で述べた真空偏極効果だ. 残っているのは, ここで計算すべき 1 個の 1 ループ・ダイアグラム (図 11.4 の (d)) だ.

$$\Gamma^\mu_{1\,\text{loop}}(p',p) = \int d^4k\ \left[e\gamma^\rho(2\pi)^4\right]\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\ \frac{-i(\not{p}'-\not{k})+m}{(p'-k)^2+m^2-i\epsilon}\right][\gamma^\mu]$$
$$\times\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\ \frac{-i(\not{p}-\not{k})+m}{(p-k)^2+m^2-i\epsilon}\right]\left[e\gamma_\rho(2\pi)^4\right]\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\ \frac{1}{k^2-i\epsilon}\right]. \tag{11.3.1}$$

ここで p' と p はそれぞれ終状態と始状態のレプトンの 4 元運動量だ. (光子の外線とレプトンの内線を結ぶ頂点の寄与は, Γ^μ の定義で因子

$e(2\pi)^4$ を落としているので, γ^μ ととる.)

この積分は明らかに紫外発散する. 発散の様子はおおよそ $\int d^4k/(k^2)^2$ だ. 真空偏極の場合と異なり, ここでゲージ不変性から要求される構造を保つためには次元正則化のような凝った正則化の手法は必要でない. なぜなら, 光子は中性粒子なので, 積分は光子のプロパゲーターに適切な修正を加える (例えば M を大きな切断質量として因子 $M^2/(k^2+M^2)$ を含ませる) ことで, ゲージ不変性を保つために他の個所に修正を加えることなしに, 有限にできるからだ. いずれにしても, 後で見るように異常磁気モーメントと荷電半径は紫外発散に全く出会うことなく計算できる. 以下では頂点関数の積分を無限大の形のままで置いておき, 必要なら任意の発散積分は切断質量 M を使って表わすことができると理解しておく.

まず, この章の補遺で述べるファインマンの手法,

$$\frac{1}{ABC} = 2\int_0^1 dx \int_0^x dy \left[Ay + B(x-y) + C(1-x)\right]^{-3} \tag{11.3.2}$$

を使って, 分母をまとめることから始める. これを (11.3.1) の分母に適用して,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(p'-k)^2+m^2-i\epsilon}\,\frac{1}{(p-k)^2+m^2-i\epsilon}\,\frac{1}{k^2-i\epsilon} \\
&= 2\int_0^1 dx \int_0^x dy \Big[\Big((p'-k)^2+m^2-i\epsilon\Big)y \\
&\qquad +\Big((p-k)^2+m^2-i\epsilon\Big)(x-y) + \Big(k^2-i\epsilon\Big)(1-x)\Big]^{-3} \\
&= 2\int_0^1 dx \int_0^x dy \Big[\Big(k-p'y-p(x-y)\Big)^2 + m^2x^2 \\
&\qquad +q^2y(x-y) - i\epsilon\Big]^{-3}
\end{aligned} \tag{11.3.3}$$

を得る. ここで $q \equiv p - p'$ は光子への移行運動量だ. 積分変数を,

$$k \to k + p'y + p(x-y)$$

とずらすと, 積分 (11.3.1) は,

$$\Gamma^{\mu}_{1\,\mathrm{loop}}(p',p) = \frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \times \int_0^1 dx \int_0^x dy \int \frac{d^4k}{\left[k^2+m^2x^2+q^2y(x-y)-i\epsilon\right]^3} \times\gamma^{\rho}\Big[-i\Big(\not{p}'(1-y)-\not{k}-\not{p}(x-y)\Big)+m\Big]\gamma^{\mu} \times\Big[-i\Big(\not{p}(1-x+y)-\not{k}-\not{p}'y\Big)+m\Big]\gamma_{\rho} \qquad (11.3.4)$$

となる.

次の段階はウィック回転だ. 前の節で説明したように, 分母の $-i\epsilon$ より, k^0 の積分路を虚軸へ回転するときには反時計回りに回転させなければならない. その結果, k^0 の $-\infty$ から $+\infty$ までの積分は$-i\infty$ から $+i\infty$ までの虚軸上の積分, つまり $k^4 \equiv -ik^0$ の $-\infty$ から $+\infty$ までの実軸上の積分で置き換えられる. また (11.3.4) の分母の回転対称性を利用して, 分子の k について奇数次の項を落とし, $k^{\lambda}k^{\sigma}$ を $\eta^{\lambda\sigma}k^2/4$ で置き換え, 体積要素 $d^4k = idk^1dk^2dk^3dk^4$ を $2i\pi^2\kappa^3d\kappa$ で置き換える. ここで κ は 4 元ベクトル k のユークリッド長だ. これらを全て取り入れると, (11.3.4) は以下のようになる.

$$\Gamma^{\mu}_{1\,\mathrm{loop}}(p',p) = \frac{-4\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\infty} \kappa^3 d\kappa \Big\{-\kappa^2\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}\gamma_{\sigma}\gamma_{\rho}/4 +\gamma^{\rho}\Big[-i\Big(\not{p}'(1-y)-\not{p}(x-y)\Big)+m\Big]\gamma^{\mu} \times\Big[-i\Big(\not{p}(1-x+y)-\not{p}'y\Big)+m\Big]\gamma_{\rho}\Big\} \times\Big[\kappa^2+m^2x^2+q^2y(x-y)\Big]^{-3}. \qquad (11.3.5)$$

ここで興味があるのは頂点関数を,

$$\bar{u}'[i\not{p}'+m]=0\,, \qquad [i\not{p}+m]u=0$$

を満たすディラック・スピノルではさんだ行列要素 $\bar{u}'\Gamma^{\mu}u$ だけだ. よっ

て, ディラック行列の反交換関係を使って全ての因子 $\not{p}'$ を左に, また全ての因子 $\not{p}$ を右に移動し, 左または右に到達すればそれらを im で置き換えることにより, この表現を簡単化できる. 簡単だが退屈な計算の後, (11.3.5) は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\bar{u}'\Gamma^{\mu}_{\text{one loop}}(p',p)u = &\frac{-4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \\
&\bar{u}'\Big\{\gamma^\mu\Big[-\kappa^2 + 2m^2(x^2-4x+2) + 2q^2(y(x-y)+1-x)\Big] \\
&+4im\,p'^{\mu}(y-x+xy) + 4im\,p^{\mu}(x^2-xy-y)\Big\}u \\
&\times\Big[\kappa^2 + m^2x^2 + q^2 y(x-y)\Big]^{-3} . \qquad (11.3.6)
\end{aligned}
$$

次に最後の因子が反転 $y \to x-y$ について対称なことを利用する. この反転のもとで, p'^{μ} と p^{μ} がかかる関数 $y-x+xy$ と x^2-xy-y は入れ替わるので, 両者はその平均で置き換えてよい.

$$
\tfrac{1}{2}\,(y-x+xy) + \tfrac{1}{2}\,(x^2-xy-y) = -\tfrac{1}{2}\,x(1-x) .
$$

これにより最終的に,

$$
\begin{aligned}
\bar{u}'\Gamma^{\mu}_{\text{one loop}}(p',p)u = &\frac{-4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \\
&\times\bar{u}'\Big\{\gamma^\mu\Big[-\kappa^2 + 2m^2(x^2-4x+2) + 2q^2(y(x-y)+1-x)\Big] \\
&\qquad -2im\,(p'^{\mu}+p^{\mu})x(1-x)\Big\}u \\
&\times\Big[\kappa^2 + m^2x^2 + q^2 y(x-y)\Big]^{-3} \qquad (11.3.7)
\end{aligned}
$$

が得られる. p^{μ} と p'^{μ} は $p^{\mu}+p'^{\mu}$ の組み合わせでのみ入っているが, これは電流の保存から要求されることだ.

考慮しなければならないダイアグラムは他にもある. もちろん Γ^{μ} にはゼロ次の項 γ^{μ} がある. 補正項 (11.1.9) の Z_2-1 に比例する項は Γ^{μ} に,

$$
\Gamma^{\mu}_{\mathcal{L}_2} = (Z_2-1)\gamma^{\mu} \qquad (11.3.8)
$$

の項を生じる. また, 外線光子のプロパゲーターに補正を挿入する効果は,

$$\Gamma^{\mu}_{\text{vac pol}}(p',p) = \frac{1}{(p'-p)^2 - i\epsilon}\Pi^{\mu\nu}(p'-p)\,\gamma_\nu \tag{11.3.9}$$

の項を生じることだ. これらの項の形はそれぞれ ($H(q^2)=0$ とおいた) 一般的な結果 (10.6.10) に一致している.

$$\bar{u}'\Gamma^{\mu}(p',p)u = \bar{u}'\left[\gamma^{\mu}F(q^2) - \frac{i}{2m}(p+p')^{\mu}G(q^2)\right]u\,. \tag{11.3.10}$$

次数 e^2 までで, 形状因子は次のとおりだ.

$$F(q^2) = Z_2 + \pi(q^2) + \frac{4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \times \frac{\left[\kappa^2 - 2m^2(x^2-4x+2) - 2q^2(y(x-y)+1-x)\right]}{\left[\kappa^2 + m^2x^2 + q^2y(x-y)\right]^3}\,, \tag{11.3.11}$$

$$G(q^2) = \frac{-4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \frac{4m^2x(1-x)\,\kappa^3\,d\kappa}{\left[\kappa^2 + m^2x^2 + q^2y(x-y)\right]^3}\,. \tag{11.3.12}$$

ここで $\pi(q^2)$ は真空偏極関数 (11.2.22) だ.

形状因子 $G(q^2)$ の積分はそのままで有限だ.

$$G(q^2) = \frac{-e^2m^2}{4\pi^2}\int_0^1 dx \int_0^x dy\, \frac{x(1-x)}{m^2x^2 + q^2y(x-y)}\,. \tag{11.3.13}$$

このため異常磁気モーメントを計算するのは簡単だ. 10.6 節で述べたように, 磁気モーメントに寄与するのは γ^μ の項だけなので, 輻射補正の効果は磁気モーメントのディラックの値に因子 $F(0)$ がかかることだ. しかし, e を真のレプトンの電荷と定義すると,

$$F(0) + G(0) = 1 \tag{11.3.14}$$

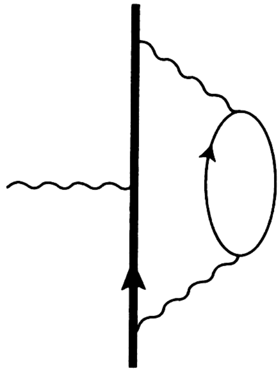


図 11.5: ミュー中間子の磁気モーメントの 2 ループ・ダイアグラム. ここで太い直線はミュー中間子を表わし, 細い波線は光子, 他の細い線は電子を表わす. このダイアグラムはミュー中間子の磁気回転比の 4 次の項に $\ln(m_\mu/m_e)$ に比例する比較的大きな寄与をする.

が要求され, よって磁気モーメントは,

$$\mu = \frac{e}{2m}\Big(1 - G(0)\Big) \tag{11.3.15}$$

と表わされる. (11.3.13) から, 以下を得る.

$$-G(0) = \frac{e^2}{8\pi^2} = 0.001161\ . \tag{11.3.16}$$

これは最初にシュウィンガー[5]によって計算された有名な $\alpha/2\pi$ の補正だ.

もちろんこれは磁気モーメントへの輻射補正の最初の項にすぎない. 次の e について 4 次の次数でさえ, 非常に多くの項があって計算はきわめて複雑になる. しかし, ミュー中間子と電子の質量比が大きいので, ミュー中間子の磁気モーメントの 4 次の項のなかで他の項より幾分大きな項が一つある. それは, 図 11.5 に示したように 2 次

のダイアグラムの仮想的な光子の線に電子のループを挿入したものだ. この電子のループは光子のプロパゲーターを (11.3.1) の $1/k^2$ から $(1+\pi_e(k^2))/k^2$ に変える効果を持つ. ここで, $\pi_e(k^2)$ は (11.2.22) で与えられるが, 質量 m は電子の質量だ.

$$\pi_e(k^2) = \frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1 x(1-x)\ln\left(1+\frac{k^2x(1-x)}{m_e^2}\right)dx\,.$$

(11.3.12) を見ればミュー中間子の磁気モーメントの計算での仮想的な光子の運動量 k の有効切断は m_μ だ. 比 m_μ/m_e は非常に大きいので m_μ^2 程度の k^2 については,

$$\pi_e(k^2) \simeq \frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1 x(1-x)\ln(m_\mu^2/m_e^2) = \frac{e^2}{12\pi^2}\ln(m_\mu^2/m_e^2) \quad (11.3.17)$$

と近似できる. ここで $\ln(m_\mu^2/m_e^2)$ ではなく 1 の程度の係数を持つ項は無視した. これは定数なので, 仮想光子の線に電子ループを付け加えることにより生じる $-G(0)$ の変化は, 単に以前の $-G(0)$ 結果 (11.3.16) に (11.3.17) をかけるだけで得られる。よって結局,

$$\mu_\mu = \frac{e}{2m_\mu}\left(1+\frac{e^2}{8\pi^2}+\frac{e^4}{96\pi^4}\left[\ln\frac{m_\mu^2}{m_e^2}+O(1)\right]\right) \qquad (11.3.18)$$

となる. (3 巻で見るように, この議論はくりこみ群の方法の初歩的なものになっている.) この結果 (11.3.18) は 4 次の完全な結果[6],

$$\mu_\mu = \frac{e}{2m_\mu}\left(\frac{e^2}{8\pi^2}+\frac{e^4}{96\pi^2}\left[\ln\frac{m_\mu^2}{m_e^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{25}{6}+\frac{197}{24}+\frac{\pi^2}{2}+\frac{9\zeta(3)}{2}-3\pi^2\ln 2+O\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)\right]\right) (11.3.19)$$

と比較できる. $e^4/96\pi^4$ にかかる「$O(1)$」の項は合わせると -6.137 で, $\ln(m_\mu^2/m_e^2) = 10.663$ に比べてそれほど小さくはない. よって (11.3.18) の近似は 4 次の項を因子 2 の程度で正しく与えているに過

ぎない. 正しい 4 次の結果 (11.3.19) によると, $\mu_\mu = 1.00116546\, e/2m_\mu$ で, 2 次の結果は $\mu_\mu = 1.001161\, e/2m_\mu$, また現在の実験値[7]は $\mu_\mu = 1.001165923(8) e/2m_\mu$ となっている.

次にもう一方の形状因子に移ろう. $F(q^2)$ を表わす (11.3.11) の右辺の積分は紫外発散する. しかし, 電荷の非くりこみ条件 (11.3.14) を満たすには, Z_2 は値,

$$Z_2 = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} - \frac{4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \times \frac{\kappa^2 - 2m^2(x^2 - 4x + 2)}{\left[\kappa^2 + m^2 x^2\right]^3} \tag{11.3.20}$$

をとる必要がある. ($\pi(0) = 0$ に留意せよ.) これ自身は紫外発散し, その発散部分は次のとおりだ.

$$(Z_2 - 1)_\infty = -\frac{e^2}{8\pi^2} \int^\infty \frac{d\kappa}{\kappa} . \tag{11.3.21}$$

(11.3.20) を (11.3.11) に代入すると,

$$F(q^2) = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} + \pi(q^2) + \frac{4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \times \left\{ \frac{\left[\kappa^2 - 2m^2(x^2 - 4x + 2) - 2q^2(y(x-y) + 1 - x)\right]}{\left[\kappa^2 + m^2 x^2 + q^2 y(x-y)\right]^3} - \frac{\left[\kappa^2 - 2m^2(x^2 - 4x + 2)\right]}{\left[\kappa^2 + m^2 x^2\right]^3} \right\} \tag{11.3.22}$$

を得る. κ 積分は今度は収束する.

$$F(q^2) = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} + \pi(q^2) + \frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \times \left\{ \frac{-m^2[x^2 - 4x + 2] - q^2[y(x-y) + 1 - x]}{m^2 x^2 + q^2 y(x-y)} + \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2} - \ln\left[\frac{m^2 x^2 + q^2 y(x-y)}{m^2 x^2}\right] \right\} . \tag{11.3.23}$$

しかし, x と y の積分が $x=0$ と $y=0$ で対数発散する. なぜなら, 分母には x と y の 2 次の冪があり分子にはちょうど二つの微分 $dx\,dy$ があるからだ. この発散の原因は, (11.3.11) の分母 $[\kappa^2+m^2x^2+q^2y(x-y)]^3$ が $x=0$, $y=0$, $\kappa=0$ でゼロになることにまでさかのぼることができる. この無限大は κ の大きな領域ではなくてむしろ小さな領域から生じるので, 紫外発散ではなく**赤外発散** (infrared divergence) と呼ばれる.

赤外発散の包括的な取り扱いは 13 章で行う. そこでは, 電子の形状因子 $F(q^2)$ の赤外発散により導入されたような電子・電子散乱等の過程の断面積に現れる赤外発散は, 弾性散乱と同時に低エネルギー光子の放出を含めると相殺することを示す. また, 14 章で見るように, 原子のエネルギー準位の輻射補正を計算するときには, 束縛電子は正確には自由粒子の質量殻上にないため, $F(q^2)$ の発散は切断される. 今のところ単に仮想的な光子の質量 μ を導入することで $F(q^2)$ の赤外発散を切断して計算を続け, この結果をどう使うかは 14 章に残しておく.

光子の質量 μ を導入すると, (11.3.1) の分母の $k^2-i\epsilon$ は $k^2+\mu^2-i\epsilon$ で置き換わる. するとその効果として (11.3.3)–(11.3.7), (11.3.11), (11.3.20), (11.3.22) の分母の 3 乗された量に $\mu^2(1-x)$ の項が付け加わる. (11.3.23) は以下の式で置き換わる。

$$
\begin{aligned}
F(q^2) = 1 &+ \frac{e^2}{8\pi^2} + \pi(q^2) + \frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx \int_0^x dy \\
&\times \left\{ \frac{-m^2[x^2-4x+2] - q^2[y(x-y)+1-x]}{m^2x^2+q^2y(x-y)+\mu^2(1-x)} + \frac{m^2[x^2-4x+2]}{m^2x^2+\mu^2(1-x)} \right. \\
&\qquad \left. - \ln\left[\frac{m^2x^2+q^2y(x-y)+\mu^2(1-x)}{m^2x^2+\mu^2(1-x)}\right]\right\} . \qquad (11.3.24)
\end{aligned}
$$

この積分は完全に収束する. それはスペンス (Spence) 関数を使って表わすことができるが, 結果は特に役に立つというものではない. 14

章の目的には, 小さな q^2 の場合の $F(q^2)$ の振舞いを計算するだけで十分だ. ワードの恒等式から $F(0) = 1 - G(0) = 1 + e^2/8\pi^2$ であることはすでに知っているので, $q^2 = 0$ での 1 階微分 $F'(q^2)$ を考察する. (11.3.24) よりこれは次のとおりだ.

$$F'(0) = \pi'(0) + \frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \times \left\{ -\frac{2y(x-y)+1-x}{m^2x^2+\mu^2(1-x)} + \frac{m^2[x^2-4x+2]y(x-y)}{[m^2x^2+\mu^2(1-x)]^2} \right\}. \quad (11.3.25)$$

真空偏極の寄与は (11.2.22) より以下のとおりだ.

$$\pi'(0) = \frac{e^2}{60\pi^2 m^2}. \quad (11.3.26)$$

(11.3.25) で μ/m の冪に比例する全ての項を落として,

$$F'(0) = \frac{e^2}{24\pi^2 m^2}\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right] \quad (11.3.27)$$

を得る.* ここで 2/5 の項は真空偏極の寄与だ. 一方, (11.3.13) より $G(q^2)$ は $q^2 = 0$ で有限な微分を持つ.

$$G'(0) = \frac{e^2}{48\pi^2 m^2}. \quad (11.3.28)$$

これらの結果は, 頂点関数のもう一つの表現 (10.6.15) で定義された荷電形状因子 $F_1(q^2)$ を用いて表わすのが最も便利だ.

$$\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\Gamma^\mu(p',p)u(\mathbf{p},\sigma) = \bar{u}(\mathbf{p}',\sigma') \times \left[\gamma^\mu F_1(q^2) + \tfrac{1}{2}\, i[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,(p'-p)_\nu F_2(q^2)\right] u(\mathbf{p},\sigma). \quad (11.3.29)$$

(10.6.17) と (10.6.18) より次のとおりだ.

$$F_1(q^2) = F(q^2) + G(q^2). \quad (11.3.30)$$

---

*y 積分は簡単だ. x 積分を最も簡単に計算するには $\mu \ll m$ の極限で積分領域を 0 から s までと s から 1 までの二つに分割すればよい. ここで $\mu/m \ll s \ll 1$ だ.

$|q^2| \ll m^2$ の場合, この形状因子は近似的に,

$$F_1(q^2) \simeq 1 + \frac{e^2}{24\pi^2}\left(\frac{q^2}{m^2}\right)\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right] \tag{11.3.31}$$

となる. これは, 荷電形状因子の $q^2 \to 0$ の極限での振舞い,

$$F_1(q^2) \to 1 - q^2 a^2/6 \tag{11.3.32}$$

で定義される**荷電半径** (charge radius) a を使って表わすことができる. (この定義は半径 a の球殻上での $\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})$ の平均は $\mathbf{q}^2 a^2 \ll 1$ の場合 $1 - \mathbf{q}^2 a^2/6$ になるという事実から来ている.) 電子の荷電半径は,

$$a^2 = -\frac{e^2}{4\pi^2 m^2}\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right] \tag{11.3.33}$$

で与えられることが分かる. 14 章で見るように原子内の電子の場合には, 光子の質量の役割は m よりずっと小さい有効赤外切断が果たしており, よってここでの対数は負の大きな値であり, a^2 の値は正となる.

11.4 電子の自己エネルギー

この章の最後に電子の自己エネルギー関数を計算する. これ自身は直接実験的な意味はないが, ここでの結果は 14 章と 3 巻で役に立つ.

10.3 節のように, $i(2\pi)^2[\Sigma^*(p)]_{\beta,\alpha}$ を, 運動量 p およびそれぞれディラックの添字 α と β をともなって入ってくる 1 本の電子の線と出ていく 1 本の電子の線を持つ全てのダイアグラムの和で定義する. ここでアスタリスク (*) は, 電子の内線をどれか 1 本切ることで非連結にできるダイアグラムは除き, 2 本の外線のプロパゲータは落とすことを表わす. すると電子の完全なプロパゲーターは以下の和で与えられる.

$$[-i(2\pi)^{-4}S'(p)] = [-i(2\pi)^{-4}S(p)]$$

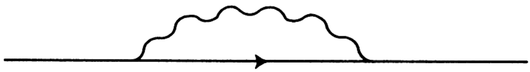


図 11.6: 電子の自己エネルギー関数の 1 ループ・ダイアグラム. これまでどおり, 直線は電子を表わし, 波線は光子を表わす.

$$+ [-i(2\pi)^{-4}S(p)][i(2\pi)^4\Sigma^*(p)][-i(2\pi)^{-4}S(p)] + \ldots . \quad (11.4.1)$$

ここで,

$$S(p) \equiv \frac{-i\not{p} + m_e}{p^2 + m_e^2 - i\epsilon} \quad (11.4.2)$$

だ. この和は簡単で,

$$S'(p) = [i\not{p} + m_e - \Sigma^*(p) - i\epsilon]^{-1} \quad (11.4.3)$$

となる.

最低次では Σ^* には図 11.6 で与えられる以下の 1 ループの寄与がある.

$$i(2\pi)^4\Sigma^*_{1\text{ loop}}(p) = \int d^4k \left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{\eta_{\rho\sigma}}{k^2 - i\epsilon}\right] \times [(2\pi)^4 e\gamma^\rho]\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{-i\not{p} + i\not{k} + m_e}{(p-k)^2 + m_e^2 - i\epsilon}\right][(2\pi)^4 e\gamma^\sigma] .$$

あるいは簡単化して,

$$\Sigma^*_{1\text{ loop}}(p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \left[\frac{1}{k^2 - i\epsilon}\right]\left[\frac{\gamma^\rho(-i\not{p} + i\not{k} + m_e)\gamma_\rho}{(p-k)^2 + m_e^2 - i\epsilon}\right] \quad (11.4.4)$$

となる. (これはファインマン・ゲージでのものだ. 質量殻から外れた荷電粒子の振幅はゲージ不変ではない.) ラム・シフトの計算に使うに

は, パウリとビラース[8]により導入された正則化の方法を用いるのが便利だ. 光子のプロパゲーター $(k^2-i\epsilon)^{-1}$ を,

$$\frac{1}{k^2-i\epsilon}-\frac{1}{k^2+\mu^2-i\epsilon}$$

で置き換えると, 電子の自己エネルギー関数は以下のようになる.

$$\Sigma^*_{1\,\mathrm{loop}}(p)=\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\left[\frac{1}{k^2-i\epsilon}-\frac{1}{k^2+\mu^2-i\epsilon}\right]\times\left[\frac{\gamma^\rho(-i\not{p}+i\not{k}+m_e)\gamma_\rho}{(p-k)^2+m_e^2-i\epsilon}\right]. \quad (11.4.5)$$

後で正則化のための項を落とすには, 正則化項の質量 μ を無限大にすればよい. 14 章ではまた $\mu\ll m_e$ の場合にも興味がある.

ここでも分母をまとめるファインマンの手法を使い, また $\gamma^\rho\gamma^\kappa\gamma_\rho=-2\gamma^\kappa$ および $\gamma^\rho\gamma_\rho=4$ を思い出すと, 以下が得られる.

$$\Sigma^*_{1\,\mathrm{loop}}(p)=\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,[2i(\not{p}-\not{k})+4m_e]\times\int_0^1 dx\left[\frac{1}{((k-px)^2+p^2(1-x)+m_e^2x-i\epsilon)^2}-\frac{1}{((k-px)^2+p^2x(1-x)+m_e^2x+\mu^2(1-x)-i\epsilon)^2}\right]. \quad (11.4.6)$$

積分変数を $k\to k+px$ とずらして, 積分路を回転すると,

$$\Sigma^*_{1\,\mathrm{loop}}(p)=\frac{-2\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\,[2i(1-x)\not{p}+4m_e]\int_0^\infty d\kappa\,\kappa^3\times\left[\frac{1}{(\kappa^2+p^2x(1-x)+m_e^2x)^2}-\frac{1}{(\kappa^2+p^2x(1-x)+m_e^2x+\mu^2(1-x))^2}\right] \quad (11.4.7)$$

となる. κ 積分は簡単だ.

$$\Sigma^*_{1\,\mathrm{loop}}(p)=\frac{-\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\,[2i(1-x)\not{p}+4m_e]$$

$$\times \ \ln\left(\frac{p^2x(1-x)+m_e^2x+\mu^2(1-x)}{p^2x(1-x)+m_e^2x}\right). \quad (11.4.8)$$

相互作用 (11.1.9) はまた $\Sigma^*(p)$ にくりこみの相殺項 $-(Z_2-1)(i\not{p}+m_e)+Z_2\delta m_e$ の寄与をする. ここで Z_2 と δm_e は, 完全なプロパゲーター $S'(p)$ が $i\not{p}$ の関数として $i\not{p}=-m_e$ で留数 1 の極を持つという条件で決まる. (次の章で見るように, これにより Σ^* は $\mu\to\infty$ のとき e の全次数で有限になる.) 最低次では, これは以下を与える.

$$\begin{aligned}\delta m_e &= -\left.\Sigma^*_{1\ \text{loop}}\right|_{i\not{p}=-m_e}\\ &= \frac{2m_e\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\,[1+x]\,\ln\left(\frac{m_e^2x^2+\mu^2(1-x)}{m_e^2x^2}\right),\end{aligned} \quad (11.4.9)$$

$$\begin{aligned}Z_2-1 &= -i\left.\frac{\partial\Sigma^*_{1\ \text{loop}}}{\partial\not{p}}\right|_{i\not{p}=-m_e}\\ &= -\frac{2\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\,\left\{(1-x)\ln\left(\frac{m_e^2x^2+\mu^2(1-x)}{m_e^2x^2}\right)\right.\\ &\qquad \left.-\frac{2\mu^2(1-x)^2(1+x)}{x(m_e^2x^2+\mu^2(1-x))}\right\}.\end{aligned} \quad (11.4.10)$$

(この次数までは, δm_e と $Z_2\delta m_e$ の区別はしない.) $\mu^2\to\infty$ でゼロになる項は落として, (11.4.8)–(11.4.10) は次のようになる.

$$\begin{aligned}\Sigma^*_{1\ \text{loop}}(p) &= \frac{-\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\,[2i(1-x)\not{p}+4m_e]\\ &\quad\times\ln\left(\frac{\mu^2(1-x)}{p^2x(1-x)+m_e^2x}\right),\end{aligned} \quad (11.4.11)$$

$$\delta m_e = \frac{2m_e\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\,[1+x]\,\ln\left(\frac{\mu^2(1-x)}{m_e^2x^2}\right), \quad (11.4.12)$$

$$Z_2-1 = \frac{-2\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\,\left\{(1-x)\ln\left(\frac{\mu^2(1-x)}{m_e^2x^2}\right)-\frac{2(1-x^2)}{x}\right\}. \quad (11.4.13)$$

すると, 完全な自己エネルギー関数では $\ln\mu^2$ の項は相殺し, 残った項

は以下のとおりだ.

$$
\begin{aligned}
\Sigma^*_{\text{order } e^2}(p) &= \Sigma^*_{1\text{ loop}}(p) - (Z_2 - 1)(i\not{p} + m_e) + Z_2\delta m_e \\
&= \frac{-2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx \left\{ [i(1-x)\not{p} + 2m_e] \ln\left(\frac{m_e^2(1-x)}{p^2 x(1-x) + m_e^2 x}\right) \right. \\
&\quad - m_e[1+x]\ln\left(\frac{1-x}{x^2}\right) \\
&\quad \left. -(i\not{p} + m_e)\left[(1-x)\ln\left(\frac{1-x}{x^2}\right) - \frac{2(1-x^2)}{x}\right]\right\} . \qquad (11.4.14)
\end{aligned}
$$

まだ, 最後の項の $x \to 0$ での振舞いからくる発散があるが, これは, p^2 を $Z_2 - 1$ が評価される点 $p^2 = -m_e^2$ にとったとき, (11.4.5) の光子の運動量 k についての積分の $k^2 = 0$ での特異な振舞いにまでさかのぼることができる. そのような赤外発散は 13 章で詳しく議論する. 今のところ重要なことは, 紫外発散が相殺することだ.

* * *

δm_e についての結果 (11.4.9) はそれ自身興味深い. 電荷とそれ自身が作る場との相互作用による電磁自己エネルギーについて期待されるとおり, $\delta m_e/m_e > 0$ だ. しかし, ポアンカレー, アブラハム, その他[9]による電磁自己エネルギーの古典論の評価とは異なり, (11.4.9) は, 切断をはずす $\mu \to \infty$ の極限で対数的に発散するだけだ. この極限で,

$$
\delta m_e \to \frac{6 m_e \pi^2 e^2}{(2\pi)^4}\ln\left(\frac{\mu}{m_e}\right) \qquad (11.4.15)
$$

となる. 14.3 節でのラム・シフトの計算では, 逆の極限 $\mu \ll m_e$ に興味がある. その極限では (11.4.9) は,

$$
\delta m_e \to \frac{e^2\mu}{8\pi}\left[1 - \frac{\mu}{2\pi m_e} + \dots\right] \qquad (11.4.16)
$$

となる.

補遺：種々の積分

N 個のプロパゲーターの分母を一まとめにするには, $D_1^{-1}D_2^{-1}\ldots D_N^{-1}$ のような積を $D_1, D_2, \ldots D_N$ の線形結合を含む関数の積分で置き換える必要がある. この目的のためには公式,

$$\frac{1}{D_1D_2\ldots D_N} = (N-1)!\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1} dx_2\cdots\int_0^{x_{N-2}} dx_{N-1} \times\left[D_1x_{N-1}+D_2(x_{N-2}-x_{N-1})+\cdots+D_N(1-x_1)\right]^{-N} \tag{11.A.1}$$

を利用するのが便利だ. この章ではこの公式の $N=2$ と $N=3$ の特別の場合を使った.

分母を一まとめにし, 4 元運動量の積分変数をずらし, ウィック回転を行い, 4 次元の回転不変性を使った後, 一般に,

$$\int d^4k\,\frac{(k^2)^n}{(k^2+\nu^2)^m}$$

の形の積分が現われる. ここで, $(k^2+\nu^2)^m$ は一まとめにしたプロパゲーターの分母から, また, $(k^2)^n$ はプロパゲーターの分子と頂点の運動量因子からくる. これは $2n+4\geq 2m$ のときは発散するが, その積分は時空次元を 4 から複素値 d に解析接続することにより有限な値にできる. その結果の積分を評価するには, よく知られた公式,

$$\int_0^\infty d\kappa\frac{\kappa^{\ell-1}}{(\kappa^2+\nu^2)^m} = \nu^{\ell-2m}\frac{\Gamma(\ell/2)\,\Gamma(m-\ell/2)}{2\,\Gamma(m)} \tag{11.A.2}$$

を使う. ここで $\ell=d+2n$ だ. 11.2 節でこの公式を $n=0,\ m=2$ と $n=1,\ m=2$ の特別の場合に使った.

紫外発散は (11.A.2) では, n を固定した整数として, $d\to 4$ のときの因子 $\Gamma(m-\ell/2)=\Gamma(m-n-d/2)$ の極として現れる. $2+n=m$ のときこの因子は,

$$\Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right)\to\frac{2}{d-4}+\gamma \tag{11.A.3}$$

となる．ここで $\gamma = 0.5772157\cdots$ はオイラー定数だ．$2+n>m$ のときの $d \to 4$ での振舞いは (11.A.3) とガンマ関数の漸化式から得られる．

問題

1. 真空偏極関数 $\pi(q^2)$ および Z_3 への質量 m_s でスピン・ゼロの荷電粒子を含む 1 ループ・ダイアグラムの寄与を計算せよ．$m_s \gg Z\alpha m_e$ なら，水素原子の 2s 状態のエネルギーのずれにはどのような効果を及ぼすか．

2. 質量 m_ϕ の中性スカラー場 ϕ が電子場と $g\phi\bar{\psi}\psi$ の相互作用をするとする．1 ループの次数までで，これは電子の磁気モーメントにどのような効果を及ぼすか．また Z_2 にどのような効果を及ぼすか．

3. 質量が m_ϕ で自己相互作用 $g\phi^3/6$ を持つ中性スカラー場 ϕ を考える．スカラー・スカラー散乱の S 行列要素を 1 ループの次数まで計算せよ．

4. 問題 2 の中性スカラー場が電子の質量のずれ δm_e に及ぼす効果を 1 ループの次数まで計算せよ．

参考文献

1. R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **76**, 769 (1949).

2. G. C. Wick, *Phys. Rev.* **80**, 268 (1950).

3. G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44**, 189 (1972).

4. E. A. Uehling, *Phys. Rev.* **48**, 55 (1935). 1 ループ関数 $\pi(q^2)$ は最初に $q^2 \neq 0$ について J. Schwinger により与えられた. *Phys. Rev.* **75**, 651 (1949).

5. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **73**, 416 (1948).

6. これは以下の論文で ($m_e \ll m_\mu$ でゼロになる項を含めて) 計算された. H. Suura and E. Wichmann, *Phys. Rev.* **105**, 1930 (1967); A. Petermann, *Phys. Rev.* **105**, 1931 (1957); H. H. Elend, *Phys. Lett.* **20**, 682 (1966); **21**, 720 (1966); G. W. Erickson and H. H. T. Liu, UCD-CNL-81 report (1968).

7. J. Bailey *et al.* (CERN–Mainz–Daresbury Collaboration), *Nucl. Phys.* **B150**, 1 (1979). これらの実験は蓄積リングでのミュー中間子のスピンの歳差運動を観測して行われた.

8. W. Pauli and F. Villars, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 434 (1949). また J. Rayski, *Phys. Rev.* **75**, 1961 (1949) も見よ.

9. 例えば A. I. Miller, *Theory of Relativity — Emergence (1905) and Early Interpretation (1905–1911)* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1981) 1 章を見よ.

第 12 章

くりこみの一般論

前の章で, 量子電磁理論でループを一つ持つダイアグラムの計算を行った. そこでは, 運動量空間での積分が発散したが, 理論のすべてのパラメータを実際に測定される質量や電荷のような「くりこまれた」量を使って表すと, その無限大が相殺されることを見た. 1949 年にダイソン[1]は, 量子電磁理論でこの無限大の相殺が全ての次数で起こることの証明の概略を論じた. このダイソンの議論は, 比較的単純な有限個の相互作用を持つ広範な理論にも適用できること (これは 12.1 節と 12.2 節で示す) は明らかだった. これらの理論は**くりこみ可能**な理論と呼ばれ, 量子電磁理論はその簡単な一例となっている.

長年, 物理的に意味のある理論はくりこみ可能な場の量子論の形をとると広く考えられてきた. くりこみ可能性は, 弱い相互作用, 電磁相互作用, 強い相互作用の現代の「標準模型」の発展に決定的な役割を果たした. しかしここで見るように, 紫外発散の相殺は, 本質的にはくりこみ可能性に依らない. 対称性から許される無限個の相互作用をすべて入れておく限り, いわゆる非くりこみ可能な理論は実際にはくりこみ可能な理論と同様にくりこみ可能だ.

今日では, 手の届く範囲のエネルギーで我々が物理を記述するのに

使う現実的な理論は,「有効場の理論」と呼ばれているものだと一般的に考えられている. 12.3 節で論じるように, これらは, より基本的な理論の低エネルギー近似になっている. その基本理論は場の理論とは全く異なるものであるかも知れない. どの有効場の理論も必然的に非くりこみ可能な相互作用を無限個含む. しかしながら, 12.3 節と 12.4 節で述べるように, 充分に低いエネルギーではすべての非くりこみ可能な相互作用は有効場の理論では非常に小さく抑えられている. したがって, 量子電磁理論のようなくりこみ可能な理論や標準模型は, 元々の動機付けとなったくりこみ可能性の仮定とは多少異なる理由で, 物理学でその特別な地位を保っている.

12.1　発散の次数

非常に一般的な理論を考えて, その様々な種類の相互作用項に i という添字を使う. 各相互作用項は, 種類 f の場の数 n_{if} とそれにかかる微分の次数 d_i で特徴付けることができる.

まず, そのような理論で, 任意の連結・1 粒子既約なファインマン・ダイアグラムの「見かけ上の発散次数」D を計算することから始める. これは, 被積分関数の分子の運動量因子の数から分母の運動量因子の数を引き, 積分する 4 元運動量ごとに 4 を足して得られる数だ. この表面的発散の次数は, 運動量空間の中の全ての内線の運動量が一様に無限大に行く領域での積分の発散の実際の次数だ. つまり, もし $D > 0$ なら, 全ての内線の運動量が共通の因子を持って, $\kappa \to \infty$ と無限大に行く部分の振幅は,

$$\int^{\infty} \kappa^{D-1} d\kappa \tag{12.1.1}$$

と発散する. 同じ意味で, 運動量空間のこの領域に関する限り, 発散の次数が $D = 0$ の積分は対数発散し, $D < 0$ の積分は収束する. 副次的

な積分がこの領域での積分より悪く振舞う場合の問題については後で考察する.

D を計算するには, そのダイアグラムについて以下を知らなければならない.

$$I_f \equiv f \text{ 種の場の内線の数},$$
$$E_f \equiv f \text{ 種の場の外線の数},$$
$$N_i \equiv i \text{ 種の相互作用の頂点の数}.$$

f 種の場のプロパゲーター $\Delta_f(k)$ の漸近的振舞いを以下の形に書く.

$$\Delta_f(k) \sim k^{-2+2s_f}\ . \tag{12.1.2}$$

6 章を振り返ると, スカラー場では $s_f = 0$, ディラック場では $s_f = \frac{1}{2}$, 質量のあるベクトル場では $s_f = 1$ であることがわかる. より一般的には, (A, B) タイプのローレンツ変換性を持つ質量がゼロでない場については, $s_f = A + B$ となっている. 大雑把にいって, s_f を「スピン」と呼べる. しかし光子については, ゲージ不変性のために物理的効果をおよぼさない項を落とすと, その有効プロパゲーター $\eta_{\mu\nu}/k^2$ は $s_f = 0$ となっている. 同様の結果は保存カレントと相互作用する質量のあるベクトル場についても, そのカレントがこのベクトル場に依存しなければ成り立つ. また, 同様に, 重力場 $g_{\mu\nu}$ のプロパゲーターも $s_f = 0$ となっていることも示せる.

(12.1.2) によれば, プロパゲーターの D への寄与の合計は,

$$\sum_f I_f(2\,s_f - 2) \tag{12.1.3}$$

に等しい. また, i 種の相互作用のなかの微分は d_i 個の運動量因子を被積分関数にもたらすから, D への寄与の合計は,

$$\sum_i N_i\ d_i \tag{12.1.4}$$

となる. 最後に, 独立な運動量の積分変数の数の合計が必要だ. どの内線も 4 元運動量を持っているが, それらが全部独立なわけではない. これらの内線の運動量には, 各頂点のデルタ関数から生じる線形関係がある. ただし, デルタ関数の内, 一つは単に外線の運動量の保存則に対応している. したがって, 運動量空間の積分の体積要素の D への寄与は, 以下で与えられる.

$$4\left[\sum_f I_f - \left(\sum_i N_i - 1\right)\right] . \tag{12.1.5}$$

これは, もちろん, 単にダイアグラムのなかの独立なループの個数に 4 を乗じたものだ. (12.1.3), (12.1.4), (12.1.5) の寄与をすべて足すと,

$$D = \sum_f I_f(2s_f + 2) + \sum_i N_i(d_i - 4) + 4 \tag{12.1.6}$$

を得る.

(12.1.6) は, D について, そのファインマン・ダイアグラムの内部の詳細な構造に依存するように見える値を与えるので, このままではあまり便利ではない. 幸いなことに, これは,

$$2I_f + E_f = \sum_i N_i\, n_{if} \tag{12.1.7}$$

というトポロジー的な恒等式を使うと簡単にできる. (どの内線も 2 ヵ所で頂点に付いているし, 外線は 1 ヵ所で頂点に付いている.) (12.1.7) を使って I_f を消去すると, (12.1.6) が,

$$D = 4 - \sum_f E_f(s_f + 1) - \sum_i N_i \Delta_i \tag{12.1.8}$$

となることがわかる. ここで, Δ_i は i 種の相互作用を特徴づける以下のパラメータだ.

$$\Delta_i \equiv 4 - d_i - \sum_f n_{if}(s_f + 1) . \tag{12.1.9}$$

この結果は, ファインマン・ダイアグラムの構造を考察することなしに, 簡単な次元解析でも導ける. 場のプロパゲーターは自由場の対の時間順序積の真空期待値の 4 次元フーリエ変換だから, 通常の規格化をした場 f の次元* が運動量の冪で数えて $\mathcal{D}_f$ であるとき, プロパゲーターは $-4+2\mathcal{D}_f$ の次元を持つ. したがって, もし k が質量より非常に大きいとき, プロパゲーターが k^{-2+2s_f} のように振舞えば, 場の次元は $-4+2\mathcal{D}_f=-2+2s_f$ を満たし, $\mathcal{D}_f=1+s_f$ となる. i 種の相互作用は n_{if} 個のそのような場を持ち, d_i 個の微分を持つから, その次元は $d_i+\sum_f n_{if}(1+s_f)$ となる. しかし, 作用は無次元量なので, 積分 d^4x の次元 -4 を打ち消すようにラグランジアン密度の各項は $+4$ の次元を持たなければならない. したがって, この相互作用の結合定数は $4-d_i-\sum_f n_{if}(1+s_f)$ の次元を持たなければならない. これがまさしく, パラメータ Δ_i だ. f 種の外線を E_f 本持つ連結ファインマン・ダイアグラムが与える運動量空間の振幅は, 次元が合計で $\sum_f E_f(1+s_f)$ の場の時間順序積の真空期待値の $4\sum_f E_f$ 個の座標についての積分だから, 次元は $\sum_f E_f(-3+s_f)$ となる. この次元のうち, -4 は運動量空間のデルタ関数から来て, $\sum_f E_f(-2+2s_f)$ は外線のプロパゲーターの次元だから, 結合定数も全て含めた運動量積分の次数は,

$$\sum_f E_f(-3+s_f)-(-4)-\sum_f E_f(-2+2s_f)=4-\sum_f E_f(s_f+1)$$

となる. 与えられたファインマン・ダイアグラムの結合定数は, 全部で, $\sum_i N_i\Delta_i$ の次元を持つから, 運動量積分の次元は, 残る $4-\sum_f E_f(s_f+1)-\sum_i N_i\Delta_i$ となる. 全ての運動量が一様に無限大に近づく積分領域を考える限り, 運動量積分の発散の次数はその次元で与えられるか

*この章では, 「次元」は常に $\hbar=c=1$ の単位系で質量や運動量の冪の次元を意味する. 我々が使う通常の規格化とは, 自由場のラグランジアンで微分を最大数含む項 (これがプロパゲーターの漸近的振舞いを決定する) が無次元の係数を持つようにしたものだ.

表 12.1: 量子電磁理論でのラグランジアン密度に現れる項. d_i, $n_{i\gamma}$, n_{ie} は, それぞれ, その相互作用にある微分, 光子の場, 電子の場の数を表し, Δ_i は対応する係数の次数だ. ($s_\gamma = 0$, $s_e = \frac{1}{2}$ であった.)

相互作用	d_i	$n_{i\gamma}$	n_{ie}	Δ_i
$-ie\bar{\psi}\not{A}\psi$	0	1	2	$4-1-3=0$
$-\frac{1}{4}(Z_3-1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$	2	2	0	$4-2-2=0$
$-(Z_2-1)\bar{\psi}\not{\partial}\psi$	1	0	2	$4-1-3=0$
$[-(Z_2-1)m+Z_2\delta m]\bar{\psi}\psi$	0	0	2	$4-3=1$

ら, (12.1.8) が再現される.

もし全ての相互作用が $\Delta_i \geq 0$ なら, (12.1.8) から D の上限が以下のように与えられる.

$$D \leq 4 - \sum_f E_f(s_f+1)\,. \tag{12.1.10}$$

これは各種の外線の本数にのみに依存する. つまり, その振幅を計算している物理的過程で決まっている. 例えば, 前の章で調べた単純な量子電磁理論では, ラグランジアンは 12.1 表にある種類の項を含んでいる. これらの全ての相互作用は $\Delta_i \geq 0$ なので, E_γ 本の光子の外線と E_e 本のディラック粒子の外線を持つファインマン・ダイアグラムの表面的な発散の次数には, (12.1.10) から次の上限がある.

$$D \leq 4 - \tfrac{3}{2}E_e - E_\gamma\,. \tag{12.1.11}$$

有限個の外線の組のみが表面的に発散する積分を与える. これらは, 12.2 節で順に調べる. 全ての相互作用が $\Delta_i \geq 0$ を満たす理論に現れる有限個の発散は, 有限個の物理定数の再定義と場のくりこみで自動的に取り除かれることを示そう. このために, そのような理論はくり

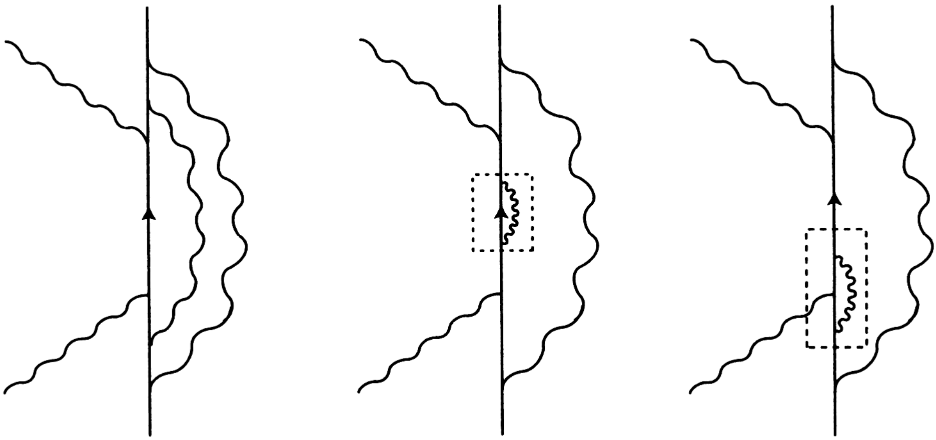
こみ可能 (renormalizable) だという. 12.3 節ではくりこみ可能な理論をすべて挙げて, 理論が物理的であるか否かの基準としてくりこみ可能性が重要であることを論じる.

「くりこみ可能」という用語は個々の相互作用にも使われる. くりこみ可能な相互作用は $\Delta_i \geq 0$ を満たすものであり, その結合定数の次数は正かゼロだ. ときによっては, $\Delta_i = 0$ の相互作用を他と区別して単にくりこみ可能と呼び, $\Delta_i > 0$ の相互作用を**超くりこみ可能** (superrenormalizable) と呼ぶ. 場や微分を加えると, 常に Δ_i が下がるので, 与えられた種類の場を含むくりこみ可能な相互作用は有限個しかない. 単純な量子電磁理論ではすべて相互作用がくりこみ可能であり, 特に $\bar{\psi}\psi$ の項は超くりこみ可能であることを見た.

一方, もし, $\Delta_i < 0$ の相互作用があれば, そのような頂点を多く含めば含むほど, (12.1.8) の発散の次数が上がる. 種々の E_f がいかに大きかろうと, $\Delta_i < 0$ の i 種の頂点を充分に多く含むことで, いずれは (12.1.8) は正 (またはゼロ) となり, 積分は発散する. そのような, 結合定数が負の次元を持つ相互作用は, **非くりこみ可能** (non-renormalizable)** であるという. どのような非くりこみ可能な相互作用を持つ理論もまた, 非くりこみ可能だ. しかし, そのような理論が絶望的だというわけではない. 後で見るように, それらの発散も理論のパラメータの再定義で吸収できるが, ただ結合定数が無限個必要となるだけだ.

ファインマン・ダイアグラムの発散の次数については, 運動量空間の全ての内線の 4 元運動量が一様に無限大に近づく領域のみを考察の対象としたことを忘れてはならない. ある部分ダイアグラムに属する 4 元運動量のみが無限大に近づく領域でも発散は生じることがあ

摂動論的統計理論では, 非くりこみ可能な相互作用は収縮的** (irrelevant) だという. これは, それらが低エネルギーの極限で重要ではないからだ. くりこみ可能な相互作用と超くりこみ可能な相互作用は, それぞれ**停留的** (marginal) と**成長的** (relevant) と呼ばれる.



(a)　　　　　　　　(b)　　　　　　　　(c)

図 12.1: コンプトン散乱に寄与する 2 ループ・ダイアグラムの例. 直線は電子, 波線は光子だ. (a) のダイアグラムの運動量積分は収束するが, (b) と (c) では, 点線で囲った部分ダイアグラムの積分のために発散する.

る. 例えば, 量子電磁理論でのコンプトン散乱 ($E_e = 2,\ E_\gamma = 2$) では, (12.1.11) より $D \leq -1$ となり, 実際に 12.1(a) 図のダイアグラムは収束するが, 12.1(b) 図や 12.1(c) 図のダイアグラムは, (点線の箱で囲んで示した) $D \geq 0$ の部分ダイアグラムが含まれているために対数発散している. これらのダイアグラムの発散は, 二つの独立な内線の 4 元運動量の 8 成分が特定の 4 次元部分空間で無限大となるときに, 漸近的振舞いが異常なことによると考えることができる. この部分空間とは, 内線か電子・光子頂点に挿入されたループを回っている 4 元運動量のみが実際に無限大に近づくという空間だ.

任意のダイアグラムの振幅が収束する条件は, 全振幅の完全多重積分のみならず, 一つ以上のループ運動量の線形結合を固定して定義さ

れる全ての副次的な積分についても, $D < 0$ が成立することであることが証明されている.[2] (12.1(b) 図と 12.1(c) 図のダイアグラムは, 点線に囲まれたループの運動量のみの副次的積分が $D \geq 0$ なので, このテストを通らない.) その比較的長い証明は初期の本[3]に良く解説されているし, いずれにせよその証明法は実際の計算とはほとんど関係がないので, ここでその証明を繰り返すことはしない. 次の節では, この条件がいかに満たされるかを述べる.

12.2 発散の相殺

ファインマン・ダイアグラムまたはその一部分で, 表面的な発散の次数が正, つまり $D \geq 0$ のものを考える. 全ての内線の運動量が一様に無限大に近づく領域での運動量積分は $\int^{\infty} k^{D-1}\, dk$ のように発散する. もし, いずれかの外線の運動量について $D+1$ 回微分すれば, 被積分関数の運動量因子は合わせて $D+1$ だけ下がる.* したがって, この部分の運動量積分は収束する. まだ, 12.1(b) 図や 12.1(c) 図にあるような部分ダイアグラムから発散が起こるかもしれないが, これはこの節の後の方で調べることにして, いまはこの可能性は無視する. $D+1$ 回の微分は積分を有限にするから, そのようなダイアグラムまたは部分ダイアグラムの寄与は, 発散する係数を持った D 次の外線の運動量の多項式と残りの有限な部分からなる.

これがどのようになっているかを簡単な例で見るために, 以下の対数発散する 1 次元積分を考える.

$$\mathcal{I}(q) \equiv \int_0^{\infty} \frac{dk}{k+q} \, .$$

---

*例えば, p を外線の 1 次結合とし, k を積分変数の 4 元運動量として, あるスカラー場の内線が運動量 $k+p$ を持つなら, プロパゲーター $[(k+p)^2+m^2]^{-1}$ を p^μ について微分すると, $-2(k_\mu+p_\mu)[(k+p)^2+m^2]^{-2}$ が得られる. これは, $k \to \infty$ で k^{-2} ではなく k^{-3} のように振舞う.

この積分の発散の次数は, $D = 1 - 1 = 0$ だ. 一回微分すると,

$$\mathcal{I}'(q) \equiv -\int_0^\infty \frac{dk}{(k+q)^2} = -\frac{1}{q}$$

となるから,

$$\mathcal{I}(q) = -\ln q + c$$

と書ける. 定数 c は明らかに発散しているが, 積分の残りは完全に有限だ. 全く同様に, 以下の $D = 1$ の積分についても,

$$\int_0^\infty \frac{k\,dk}{k+q} = a + bq + q\ln q$$

と計算できる. ここで, 定数 a と b は発散している.

さて, 外線の運動量についての多項式の項は, ラグランジアンに適切な項を加えて得られるものとちょうど同じだ. f 種の外線が E_f 本あるダイアグラムの発散の次数が $D \geq 0$ だとすると, 紫外発散の多項式は, f 種の場を $n_{if} = E_f$ 個と微分を $d_i \leq D$ 個持つ様々な相互作用をラグランジアンに加えて得られるものと同じだ. もし, ラグランジアンにそのような相互作用がすでにあるなら, これらの紫外発散はそれらの相互作用の結合定数に単に補正を加えるだけだ. したがって, これらの無限大は, それらの結合定数に適切な無限大の項を含めておけば相殺される. 測定されるのは裸の結合定数と発散多項式の対応する係数の和だけだから, もし和が (有限であろう) 測定値に等しいと要求すれば, 裸の結合定数は自動的に無限大を含み, それば内線の運動量についての発散積分の無限大を相殺するようになっていなければならない. (一つ制限がある. 発散が単に 2 本の外線を持つダイアグラムまたは部分ダイアグラムに起こるときは, これは粒子のプロパゲーターへの輻射補正であり, ある有効結合定数がその測定値に等しいと要求するのではなく, 完全なプロパゲーターが自由粒子と同じ位置に極を持ち, その留数も同じだと要求しなけらばならない.) このようにして, 全ての無限大は結合定数, 質量, 場の再定義で吸収される.

このくりこみの方式がうまく働くためには，ラグランジアンがファインマン振幅の紫外発散部分に対応するすべての相互作用を含むことが本質的だ．ラグランジアンのなかの相互作用は，もちろん，ローレンツ不変性やゲージ不変性等の様々な対称性原理によって制限されている．しかし，紫外発散も同じように制限されている．(非可換ゲージ不変性が相互作用と同様に無限大も制限するのを示すのは多少手間がかかる．これは3巻で示す.) 一般的には紫外発散には他の制限は無い．したがって，ラグランジアンは対称性原理で許される全ての可能な項を含まなければならない．(超対称な理論はこの法則の例外となる.[4])

しかし，相互作用を有限個しか含まないにもかかわらず，くりこみがうまく働くという重要な種類の理論が存在する．これらはいわゆるくりこみ可能な理論で，その相互作用がすべて $\Delta_i \geq 0$ となっているものだ．そうすると，(12.1.8) より，

$$D \leq 4 - \sum_f E_f(s_f + 1)$$

となるから，発散多項式は，外線が充分に少なく $D \geq 0$ となる限られた数のファインマン・ダイアグラムか部分ダイアグラムにのみ起こる．そのような発散多項式の寄与は，発散ダイアグラムか部分ダイアグラムを，ラグランジアンで f 種の場を E_f 個含み $0, 1, \cdots D$ 個の微分を持つ頂点一つで置き換えたものと同じだ．しかし，(12.1.9) と比較すると，これらはくりこみ可能条件 $\Delta_i \geq 0$ を満たす相互作用と正確に等しいことがわかる．つまり，

$$0 \leq d_i \leq 4 - \sum_f n_{if}(s_f + 1)$$

となるわけだ．

くりこみ可能な理論で全ての無限大が相殺するには，通常，対称性で許されるすべてのくりこみ可能な相互作用がラグランジアンに入って

いなくてはならない.** 例えば, もしスカラー (もしくは, 擬スカラー) 場 ϕ とフェルミオン場 ψ が相互作用 $\bar{\psi}\psi\phi$ (もしくは, $\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$) をするなら, ϕ^4 の相互作用も入れておかなければならない. そうでないと, 4 本のスカラー (か擬スカラー) の線が付いたフェルミオン・ループの対数発散を打ち消す相殺項がなくなるからだ.

無限大の相殺がどのように起こるかを, 単純な量子電磁理論で詳しく見ることにする. (12.1.11) から, 発散積分を持ち得るダイアグラムか部分ダイアグラムは以下のものしかないことがわかる.

$\mathbf{E_e = 2}$, $\mathbf{E_\gamma = 1}$

これは電子・光子の頂点 $\Gamma_\mu^{(\ell)}(p',p)$ だ. (上付きの添字 ℓ はこれがループのあるダイアグラムからの寄与のみを含むことを意味する.) これは, $D=0$ であるから, その発散部分は運動量に依存しない. したがって, ローレンツ不変性から, この発散する定数は γ_μ にのみ比例でき, L は対数発散する定数として,

$$\Gamma_\mu^{(\ell)} = L\gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(f)} \tag{12.2.1}$$

となる. ここで $\Gamma_\mu^{(f)}$ は有限な量だ. これで定数 L が一意的に決まるわけではない. それは, $\Gamma_\mu^{(f)}$ から $L\gamma_\mu$ へ有限な項 $\delta L\,\gamma_\mu$ を常に動かすことができるからだ. 定義を完全なものにするために, 10.4 節で示したように, $\Gamma_\mu(p,p)$ を質量殻上のディラック・スピノルではさんだ行列要素は γ^μ を同じスピノルではさんだ行列要素に比例するという性質を使う. この性質は $\Gamma_\mu^{(f)}(p,p)$ についても成立する. これにより, L を

** これに加えて, 大域的対称性により許されない相互作用と質量項も, 超くりこみ可能, つまり, $\Delta_i > 0$ ならラグランジアンに入っていてよい. これは, 超くりこみ可能な相互作用は発散の次数を下げるので, 対称性を破っていても, $\Delta_i = 0$ の厳密にくりこみ可能な相互作用で発散が相殺されることには影響しないからだ. 対称性を満たすのは, 裸の厳密にくりこみ可能な結合定数であることに注意をしておく. 質量殻上の行列要素を使って定義したくりこまれた結合定数では一般的に対称性の破れが見られる.

以下の $p^2 + m_e^2 = 0$ での処方で定義できる.

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma')\Gamma_\mu^{(f)}(p,p)u(\mathbf{p}, \sigma) = 0 \,. \tag{12.2.2}$$

$\mathbf{E_e = 2,\ E\gamma = 0}$

これは電子の自己エネルギー部分 $\Sigma^*(p)$ だ. $D = 1$ になっているので, その発散部分は入ってくるフェルミオンと出ていくフェルミオンの持つ運動量 p^μ について 1 次だ. (パリティ保存を含む) ローレンツ不変性から, これは $\not{p}$ の関数しか許されない. したがって, このループの寄与は,

$$\Sigma^{(\ell)}(p) = A - (i\not{p} + m)B + \Sigma^{(f)}(\not{p}) \tag{12.2.3}$$

と書ける. ここで, A と B は発散する定数で, $\Sigma^{(f)}$ は有限部分だ. 前と同様に, $\Sigma^{(f)}$ を $\not{p}$ についての有限な 1 次式だけずらせるので, これだけでは定数 A と B は一意的には決まらない. 定数 A と B は, $i\not{p} = -m$ に対して以下が成立するように定義する.

$$\Sigma^{(f)} = \frac{\partial \Sigma^{(f)}}{\partial \not{p}} = 0 \,. \tag{12.2.4}$$

実際には, B は新しい発散定数ではない. カレント保存を満たす正則化の方法を使う限り, Γ_μ と Σ はワード恒等式 (10.4.27) で以下のように関係している.

$$\Gamma^\mu(p,p) = \gamma^\mu + i\frac{\partial}{\partial p_\mu}\,\Sigma(p) \,.$$

したがって,

$$L\gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(f)}(p,p) = B\gamma_\mu + i\frac{\partial \Sigma^{(f)}(p)}{\partial p^\mu} \tag{12.2.5}$$

となる. この式の $\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma')$ と $u(\mathbf{p}, \sigma)$ の間の行列要素をとり, (12.2.2) と (12.2.4) を使うと,

$$L = B \tag{12.2.6}$$

となることがわかる.

$\mathbf{E}\gamma = 2$, $\mathbf{Ee} = 0$

これは光子の自己エネルギー部分 $\Pi^*_{\mu\nu}(q)$ だ. $D = 2$ なので, その発散部分は q の 2 次式だ. ローレンツ不変性からは, $\Pi^*_{\mu\nu}$ は $\eta_{\mu\nu}$ と $q_\mu q_\nu$ の 1 次結合であり, その係数は q^2 にのみ依存する. したがって, ループの寄与は, 以下の形をとる.

$$\Pi^{(\ell)}_{\mu\nu}(q) = C_1\eta_{\mu\nu} + C_2\eta_{\mu\nu}q^2 + C_3 q_\mu q_\nu + [\text{有限な項}]\ .$$

ここで C_1, C_2, C_3 は発散する定数だ. カレント保存を満たす正則化の方法を使う限り,

$$q^\mu \Pi^{(\ell)}_{\mu\nu}(q) = 0$$

となっていなければならない. これは発散する項についても同じだから, $C_1 q_\nu + (C_2 + C_3)q^2 q_\nu$ は任意の q に対して有限でなければならない. したがって, C_1 と $C_2 + C_3$ は有限であり, $\Pi^{(\ell)}_{\mu\nu}(q)$ の有限部分にまとめられることがわかる. これにより, 以下のように書ける.

$$\Pi^{(\ell)}_{\mu\nu}(q) = (\eta_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\left(C + \pi(q^2)\right)\ . \tag{12.2.7}$$

ここで, $\pi(q^2)$ は有限で, C は $\Pi_{\mu\nu}$ に残っている唯一の発散だ. C の定義を明確にするために, 任意の有限な定数 $\pi(0)$ を C に移し,

$$\pi(0) = 0 \tag{12.2.8}$$

とすることができる.

$\mathbf{E}\gamma = 4$, $\mathbf{Ee} = 0$

これは光子の光子による散乱の振幅 $M_{\mu\nu\rho\sigma}$ だ. $D = 0$ なので, ローレンツ不変性とボーズ統計から, 以下のように書ける. (ループが無いダ

イアグラムからの寄与は無い.)

$$M_{\mu\nu\rho\sigma} = K(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) + [\text{有限な項}] .$$

ここで, 定数 K は発散を含み得る. しかし, カレント保存から,

$$q^\mu M_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$$

となるので, $K(q_\nu\eta_{\rho\sigma} + q_\rho\eta_{\nu\sigma} + q_\sigma\eta_{\nu\rho})$ は有限だ. これが $q \neq 0$ で成立するには, K 自身が有限でなければならない. これはくりこみをする際に対称性原理が果たす役割のよい例になっている. もし, K が無限大になったら, それを $(A_\mu A^\mu)^2$ の相互作用の結合定数のくりこみで取り除くことは許されない. なぜなら, そのような相互作用はゲージ不変性で禁止されているからだ. しかし, K は, ゲージ不変性から要求されるカレント保存によって有限となっている.

$\mathbf{E\gamma = 1,\ Ee = 0}$ と $\mathbf{Ee = 1,\ E\gamma = 0, 1, 2}$

これらは, それぞれ, $D = 3$ と $D = \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ だが, ローレンツ不変性からそのようなダイアグラムはすべてゼロとなっている.

$\mathbf{E\gamma = 3,\ Ee = 0}$

これは $D = 1$ だが, 荷電共役対称性によりゼロとなる.

読者は多分, 独立な発散定数 A, B, C が量子電磁理論のラグランジアンの相殺項部分 (11.1.9) の Z_2, Z_3, δm と 1 対 1 に対応していることに気づいただろう. これらの相殺項は直接, $\Sigma^*(p)$ に $Z_2\delta m - (Z_2 - 1)(i\not{p} + m)$ の寄与をする. 1 粒子の極の位置と留数が自由場のプロパゲーターのものと一致するという要求から, 全 $\Sigma^*(p)$ が (12.2.4) を満たす, つまり,

$$Z_2\,\delta m = -A, \tag{12.2.9}$$

$$Z_2 - 1 = -B \tag{12.2.10}$$

となるように, Z_2 と δm を選ばなければならない. こうすると, 完全な電子の自己エネルギー部分がちょうど有限関数 $\Sigma^{(f)}(p)$ になる.

$$\Sigma(p) = \Sigma^{(f)}(p)\ . \tag{12.2.11}$$

また, $\mathcal{L}_2$ は直接に Γ_μ に $(Z_2 - 1)\gamma_\mu$ だけの寄与をする. (12.2.6) を使うと, 完全な頂点が,

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu + (Z_2 - 1)\gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(\ell)} = \gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(f)} \tag{12.2.12}$$

となることがわかる. これは有限なだけでなく, 以下の条件も満たす.

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma')\Gamma_\mu(p, p)u(\mathbf{p}, \sigma) = \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma')\gamma_\mu u(\mathbf{p}, \sigma')\ . \tag{12.2.13}$$

これは, (10.6.13) と (10.6.14) からもわかる. また, $\mathcal{L}_2$ は $\Pi^*_{\mu\nu}(q)$ に $-(Z_3 - 1)(q^2\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)$ の寄与をする. 光子のプロパゲーターが自由場と同じ留数の極を持つには, 全 $\Pi_{\mu\nu}(q)$ の中の $q^2\eta_{\mu\nu} - q_\mu\nu q_\nu$ の係数がゼロとなる必要がある. したがって,

$$Z_3 = 1 + C \tag{12.2.14}$$

となる. こうすると, 光子のプロパゲーターは有限となる.

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (\eta_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\pi(q^2)\ . \tag{12.2.15}$$

いままでに, 運動量空間で全ての内線の運動量が (一般的な比で) 大きくなっている領域から起こる発散を調べて, それらが外線の運動量について多項式となり, 適切な相殺項で打ち消されることがわかった. そのようなダイアグラムは**表面的に収束する** (superficially convergent) という. 全ての紫外発散が実際にくりこみで取り除かれると結論するには, 高次のダイアグラムで運動量積分変数の全部ではなく一部分が

無限大に近づくときに起こる紫外発散も調べなければならない．例えば量子電磁理論では，副次的な積分の表面的な発散は，光子の自己エネルギー部分 Π^* か，電子の自己エネルギー部分 Σ^* か，電子・電子・光子頂点 Γ^μ かになっている部分ダイアグラムから発生する．このような発散の問題は，外線の運動量の微分で取り除けないことだ．外線の運動量で微分しても，発散する部分ダイアグラムには属さない部分の内線にのみ微分がかかった項が残る．したがって，これらの部分ダイアグラムの発散の次数は下がらない．前の節で述べたように，ダイアグラムかダイアグラムの和は，それ自身と全ての副次的な積分が運動量の次数の勘定で表面的に収束するときにのみ，実際に収束する．しかし，そのような発散する部分ダイアグラムがあるときにはいつも，無限大の相殺項が伴っている．量子電磁理論では，それらは (11.1.9) の項だ．つまり，各 $\Pi^*_{\mu\nu}(q)$ に対して $-(Z_3-1)(q^2\eta_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu)$，各 $\Sigma^*(p)$ に対して $Z_2\delta m-(Z_2-1)(i\not{p}+m)$，各 Γ^μ に対して $(Z_2-1)\gamma^\mu$ が伴っている．ダイアグラム全体に対してと同様に，これらの相殺項は発散する部分ダイアグラムからの無限大を打ち消す．[1]

残念なことに，この単純な議論には欠点がある．それは，重複発散 (overlapping divergence) の可能性だ．つまり，二つの発散する部分ダイアグラムが内線を一本共有するために，それらが独立な発散積分と見なせない場合だ．量子電磁理論では，これは，12.2 図と 12.3 図に示した二つの電子・電子・光子頂点が光子か電子の自己エネルギー部分の内部で重複する場合のみに起こる．†

重複発散も取り扱って完全なくりこみができることを示すには，表

†二つの自己エネルギー部分が一本の線を共有したり，自己エネルギー部分と頂点部分が一本の線を共有したりすると，外線が充分な本数残らずに，それらがダイアグラムの他の部分と連結できない．歴史的には，電子の自己エネルギーの重複発散の問題を避けるために，ワード恒等式 (10.4.26) を使って重複発散の起こらない頂点関数で電子の自己エネルギーを表し，この問題を避けた．このやり方は不必要であり，ここでは採用しない．また，これでは，光子や他の中性粒子の自己エネルギーの問題を避けることができない．

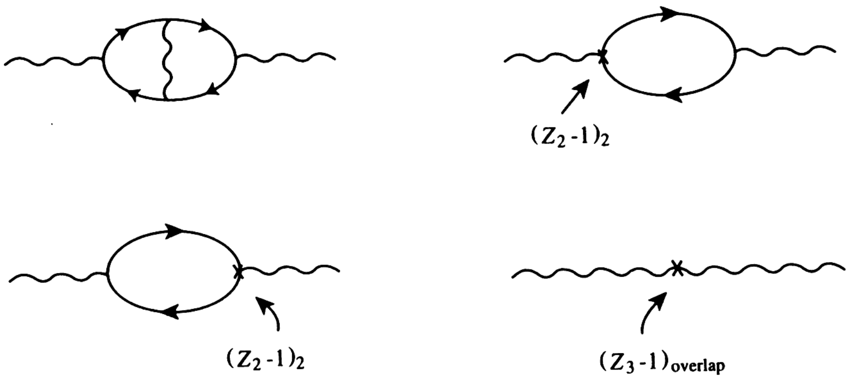


図 12.2: 重複発散を含む量子電磁理論での光子の自己エネルギー補正の 4 次のダイアグラム. 矢印の付いた線は電子, 波線は光子を表す. ×印は相殺項の寄与を表す.

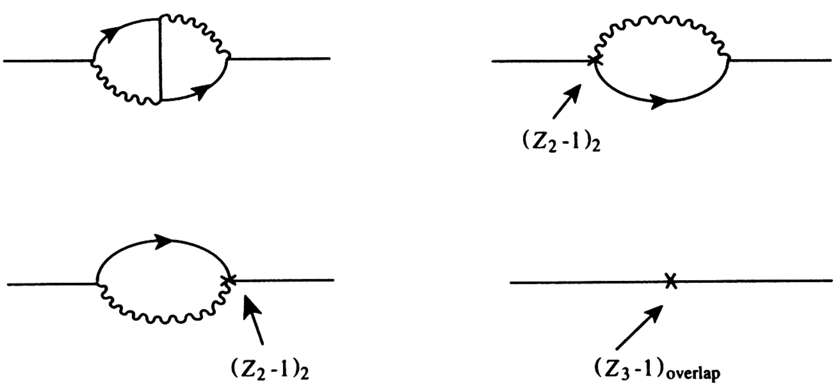


図 12.3: 重複発散を含む量子電磁理論での電子の自己エネルギー補正の 4 次のダイアグラム. 波線は光子, 他の線は電子を表す. ×印は相殺項の寄与を表す.

面的な紫外発散を積分全体のみならず副次的な積分すべてについても消す処方箋があり，その処方箋が (少なくとも形式的に) 質量，場，結合定数のくりこみで実現していることを証明する必要がある．そうすれば，参考文献 2 の定理により，くりこまれた場の全てのグリーン関数がくりこまれた質量と結合定数で表されたときに有限となることが保証される．場，結合定数，質量のくりこみが全ての積分と副次的積分を表面的に収束させることの証明は，サラム (Salam)[5] によって初めて与えられた．紫外発散を消すためのより明確な処方箋は，ボゴリューボフ (Bogoliubov) とパラシーク (Parasiuk)[6] によって与えられ，ヘップ (Hepp) によって修正された．[7] 彼らはまた，この処方箋は場，質量，結合定数のくりこみと同等であることを示した．最終的にツィンマーマン (Zimmerman)[8] が，この処方箋で積分全体とその全ての副次的な積分の表面的発散が打ち消され，参考文献 2 の定理を使って，くりこまれたファインマン運動量積分が収束すると結論した．

表面的発散を消去するこの「BPHZ」処方箋では，端的に述べて，まずダイアグラム全体とその部分ダイアグラムを箱で囲む全ての可能なやり方 (これを「森」 (forest) と呼ぶ) を考える．これらの箱は入れ子になっていてもよいが，重複してはならない．(下に例を与える.) それぞれの森について，箱の中の部分ダイアグラムで表面的な発散の次数が D であるものについて，被積分関数をその箱に流入か流出する運動量でテイラー展開し，その最初の $D+1$ 項で引き算項を定義する．(これを一番内側の箱から始めて，外へ向かっていく.)‡ 引き算をされたファインマン振幅は，もとのダイアグラムから全ての引き算項を差し引いたものになっている．これには，全ダイアグラムを一つの箱で囲む森の引き算項をも含む．

‡ここに述べた方式では，この処方箋はくりこみ可能な理論のみならず，くりこみ不可能な理論にも適用できる．くりこみ可能な理論では，箱がラグランジアンのくりこみ可能な項に対応する限られた数のダイアグラムを含まない限り，引き算はないということになる．

このように計算した引き算をされたファインマン振幅が元のラグランジアンの全ての場, 結合定数, 質量をくりこまれたものに置き換えて得られるものと同じであることを証明するのは比較的簡単だ. このやり方は, くりこまれた場, 結合定数, 質量が, 4 元運動量がゼロとなるというあまり通常使われないくりこみ点での振幅で定義されているという点で, 11 章で行った類のくりこみと異なる. (この意味で, この節の初めに扱った 1 次元の発散積分は, 発散項を分離する BPHZ 法の初等的な例になっている.) しかし, このくりこみ点は特別なものではない. ファインマン振幅が, この通常と異なるくりこみをされた量で表して有限になれば, 通常のくりこみをされた場, 結合定数, 質量で書き換えても何ら無限大は出てこない.

実際には, BPHZ の引き算処方箋を使う必要はない. 場, 質量, 結合定数を, それらのくりこまれたもの (これらは任意の便利なくりこみ点で定義されていてよい) で置き換えれば, 自動的に全ての無限大を打ち消す相殺項が現れる. BPHZ 引き算処方箋が本当に全ての積分を収束させることを証明する代わりに, 重複発散があるにもかかわらずくりこみがうまく働く 1 例だけを調べておく.

光子の自己エネルギー部分 $\Pi^*_{\mu\nu}(q)$ への 12.2 図の 4 次の寄与を考える. (この場合, 森は, p と p' についての全積分, p のみについての副次的積分, p' のみについての副次的積分からなる.) 頂点部分と光子の場のくりこみに相当する相殺項を含めると, これは, 以下の値を持つ.

$$
\begin{aligned}
[\Pi^*_{\mu\nu}(q)]_{\text{overlap}} = &-\frac{e^4}{(2\pi)^8}\int d^4p\int d^4p'\,\frac{1}{(p-p')^2-i\epsilon} \\
&\times \mathrm{Tr}\left\{S(p')\,\gamma_\nu\,S(p'+q)\,\gamma^\rho\,S(p+q)\,\gamma_\mu\,S(p)\,\gamma_\rho\right\} \\
&-2\,(Z_2-1)_2\,\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4p\;\mathrm{Tr}\left\{\gamma_\nu\;S(p+q)\,\gamma_\mu\,S(p)\,\right\} \\
&-(Z_3-1)_{\text{overlap}}\,(q^2\eta_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu)\,.
\end{aligned}
\tag{12.2.16}
$$

ここで, $S(p)\equiv[-i\not{p}+m]/[p^2+m^2-i\epsilon]$ であり, $(Z_2-1)_2$ は Z_2-1 の

なかの e について 2 次の項, そして, $(Z_3-1)_{\text{overlap}}$ は $[\Pi^*_{\mu\nu}(q)]_{\text{overlap}}$ の q について 2 次の項を打ち消すための e について 4 次の対数発散する定数だ. 第 2 項の因子 2 は, 2 次の光子自己エネルギーの二つの頂点のそれぞれにくりこみの相殺項 Z_2-1 が付くからだ. 第 1 項は, p 積分の光子の自己エネルギーに p' 積分の頂点補正が挿入されたものとも, p' 積分の光子の自己エネルギーに p 積分の頂点補正が挿入されたものとも, どちらとも解釈できる. しかし, 光子のプロパゲーターは一つしかないから, 二つの独立な頂点補正が挿入されたものとは解釈できない.

(12.2.16) の無限大をどのように取り扱うかを見るために, 以下を使う.

$$[(Z_2-1)_2+R_2]\gamma_\mu=\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p'}{p'^2-i\epsilon}\,\gamma_\rho\,S(p')\,\gamma_\mu\,S(p')\gamma^\rho\,. \quad (12.2.17)$$

ここで, R_2 は残りの有限部分だ. (ローレンツ不変性から, 右辺の積分は γ_μ に比例することがわかる. この積分と $(Z_2-1)_2\gamma_\mu$ の差は, e の 2 次の完全なくりこまれた電子・電子・光子頂点の電子と光子の運動量がゼロでの値であり, したがって有限だ.) これにより, (12.2.16) を以下の形に書きかえられる.

$$\begin{aligned}
[\Pi^*_{\mu\nu}(q)]_{\text{overlap}} &= -\frac{e^4}{(2\pi)^8}\int d^4p\int d^4p' \\
&\times\left[\frac{1}{(p-p')^2-i\epsilon}\mathrm{Tr}\left\{S(p')\,\gamma_\nu\,S(p'+q)\,\gamma^\rho\,S(p+q)\,\gamma_\mu\,S(p)\,\gamma_\rho\right\}\right.\\
&\quad-\frac{1}{p'^2-i\epsilon}\mathrm{Tr}\left\{S(p')\,\gamma_\nu\,S(p')\,\gamma^\rho\,S(p+q)\,\gamma_\mu\,S(p)\,\gamma_\rho\right\}\\
&\quad\left.-\frac{1}{p^2-i\epsilon}\mathrm{Tr}\left\{S(p')\,\gamma_\nu\,S(p'+q)\,\gamma^\rho\,S(p)\,\gamma_\mu\,S(p)\,\gamma_\rho\right\}\right]\\
&-2\,R_2\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4p\;\mathrm{Tr}\left\{\gamma_\nu\;S(p+q)\,\gamma_\mu\,S(p)\,\right\}\\
&-(Z_3-1)_{\text{overlap}}(q^2\eta_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu)\,.
\end{aligned} \quad (12.2.18)$$

最初に p' だけの積分を考える. 最初の 2 項は, 共に対数発散するが,

その差は有限だ．第3項も (ゲージ不変な正則化を使って) 対数発散するが，この項の発散は，(最初の2項と異なり) q についての2次多項式であり，残りは有限だ．この発散は $\Pi^*_{\mu\nu}(q)$ の展開の全ての2次の項を打ち消す $-(Z_3-1)(q^2-q^\mu q^\nu)$ の項によって打ち消される．したがって，p' 積分は有限な結果を与える．(12.2.16) の対称性から，p の副次的積分もまた有限な結果を与えることがわかる．(a と b を任意のゼロでない定数として) $ap+bp'$ を固定した p と p' についての一般的な副次的積分は明白に収束し，p と p' をともに積分したものは，$-(Z_3-1)_{\text{overlap}}(q^2-q^\mu q^\nu)$ の相殺項で有限となる．したがって，(12.2.18) およびそのどの副次的積分も次数勘定の収束条件を満たし，前の節で述べた定理[2]によって，この式全体が実際に収束する．

* * *

量子電磁理論では，くりこまれた質量と場だけでなく，くりこまれた結合定数をも自然に定義することができる．これは常にそうであるわけではない．たとえば，一つの実スカラー場 $\phi(x)$ が以下のラグランジアンを持つ理論を考える．

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\,\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi-\frac{1}{2}\,m^2\phi^2-\frac{1}{24}\,g\,\phi^4\,. \tag{12.2.19}$$

1ループの次数では，スカラー・スカラー散乱の S 行列はファインマン則によって，

$$S(q_1q_2\to q_1'q_2')=\frac{-i(2\pi)^4\delta^4(p_1'+p_2'-p_1-p_2)}{(2\pi)^6(16E_1'E_2'E_1E_2)^{1/2}}F(q_1q_2\to q_1'q_2') \tag{12.2.20}$$

と与えられる．ここで，

$$-i(2\pi)^4\,F(q_1q_2\to q_1'q_2')=-i(2\pi)^4g+\ \frac{1}{2}\Big[-i(2\pi)^4g\Big]^2\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\right]^2$$
$$\times\int d^4k\left[\frac{1}{[(q_1+k)^2+m^2-i\epsilon][(q_2-k)^2+m^2-i\epsilon]}\right.$$

$$+ (q_2 \to -q_1') + (q_2 \to -q_2') \Big] \tag{12.2.21}$$

であり, q_1, q_2 と q_1', q_2' は入ってくる 4 元運動量と出て行く 4 元運動量だ. 通常のように, 分母を結合し, k^0 の積分路を回転して,

$$F = g - \frac{g^2}{16\pi^2} \int_0^\infty k^3 dk \int_0^1 dx \Big\{ \left[k^2 + m^2 - sx(1-x)\right]^{-2} + \left[k^2 + m^2 - tx(1-x)\right]^{-2} + \left[k^2 + m^2 - ux(1-x)\right]^{-2} \Big\} \tag{12.2.22}$$

となる. ここで, s, t, u は**マンデルシュタム変数** (Mandelstam variable) と呼ばれ, 以下で定義される.

$$s = -(p_1 + p_2)^2 \,, \qquad t = -(p_1 - p_1')^2 \,, \qquad u = -(p_1 - p_2')^2 \,. \tag{12.2.23}$$

これらは, $s + t + u = 4m^2$ で関係している. また, x は分母を結合するときに導入したファインマン・パラメータだ. $k = \Lambda$ で紫外切断をすると, これは ($\Lambda \gg m$ のときに) 以下を与える.

$$F = g - \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \Big\{ \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - sx(1-x)}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - tx(1-x)}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - ux(1-x)}\right) - 3 \Big\} \,. \tag{12.2.24}$$

くりこまれた結合定数 g_R は s, t, u の任意の値での F の値として定義できる. ただし, s, t, u は F が実になる領域にとることにする. 例えば, スカラー場の間の対称性を保持するために $p_1^2 = p_2^2 = {p_1'}^2 = {p_2'}^2 = \mu^2$ で $s = t = u = -4\mu^2/3$ の質量殻外の点でくりこむことにすると,¶ く

¶(12.2.25) の導出に戻れば, この導出で $p_1^2 = p_2^2 = {p_1'}^2 = {p_2'}^2 = -m^2$ の条件を使わなかったことを確かめることができる. したがって, (12.2.24) は外線の質量に何をとろうと成立する.

りこまれた結合定数 g_R をこの点での F の値として, 以下が成立する.

$$g = g_R + \frac{3g^2}{32\pi^2}\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) - 1 - \int_0^1 dx\ \ln\left(\frac{4x(1-x)}{3} + \frac{m^2}{\mu^2}\right)\right] + \cdots . \tag{12.2.25}$$

したがって, (12.2.24) での切断定数への依存は g_R^2 の次数で打ち消し合い, g_R を使った F の表式は以下のように有限になる.

$$\begin{aligned} F = g_R - \frac{g_R^2}{32\pi^2}\int_0^1 dx \Bigg\{ &\ln\left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - sx(1-x)}\right) \\ &+ \ln\left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - tx(1-x)}\right) + \ln\left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - ux(1-x)}\right)\Bigg\} \\ &+ \cdots . \end{aligned} \tag{12.2.26}$$

ここで μ^2 は, g_R が実となるように $-3m^2$ より大きい範囲内で, 任意の実の量に選べる. (12.2.26) の μ に対するあらわな依存性は, もちろん, くりこまれた結合定数の μ 依存性で打ち消されている. このくりこみの処方を変える自由度 (これはもちろん電磁理論にも他の現実的な理論にもある) は, 3 巻でくりこみ群の手法を扱うときに非常に重要となる.

12.3 くりこみは必要か？

前の節では, ラグランジアンに有限個の項しか含まないにもかかわらずくりこみができるという特別な種類の理論を見つけた. これらの理論は, 全ての相互作用がくりこみ条件,

$$\Delta_i \equiv 4 - d_i - \sum_f n_{if}(s_f + 1) \geq 0$$

を満たすものだ. ここで, d_i と n_{if} は i 種の相互作用の中の微分の数と f 種の場の数だ. また, s_f は (制限条件は付くが) f 種の場のスピンだ. このような理論でくりこみがうまく働くためには, 対称性を満

たす全てのくりこみ可能な相互作用が実際にラグランジアンに現れることが通常必要だ.

そのような相互作用の個数が限られていることが重要だ. もし, 場や微分が多すぎたり, 場のスピンが大きすぎると, Δ_i が負になる. 特別な打消しが起こらないとすると, $s_f \geq 1$ の場を含むくりこみ可能な相互作用は皆無だ. これは, ラグランジアンでそのような場と二つ以上の他の場を含んで, $\Delta_i \geq 0$ となっている項は, 唯一, $s_f = 1$ の場と二つのスカラーを含み微分が無い項だが, これはローレンツ不変にならないからだ. 3 巻で, 一般の質量がゼロでスピンが 1 のゲージ場は, 適切なゲージをとると実際上光子のように $s_f = 0$ となっていることを見る. また, 3 巻では, 質量のあるゲージ場でさえ, その質量の起源によっては, 実際上 $s_f = 0$ になり得ることを見る. 12.2 表は, これらの特別な場合を除いて, スカラー ($s = 0$), 光子 ($s = 0$), スピン $\frac{1}{2}$ のフェルミオン ($s = \frac{1}{2}$) を含み, ローレンツ不変性とゲージ不変性から許される全てのラグランジアン密度のくりこみ可能な項を挙げる.

くりこみ可能性の要求が, 考え得る物理的な理論の種類に厳しい制限を課すことがわかる. そのような制限は物理的な理論の構造に貴重な鍵を与える. 例えば, ローレンツ不変性とゲージ不変性だけでは, 量子電磁理論のラグランジアンに $\bar{\psi}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi F^{\mu\nu}$ に比例する「パウリ」項が許され, これにより電子の磁気モーメントは自由パラメータとなるが, この項はくりこみ可能でないので排除される. 11.3 節に概略を述べた電子の磁気モーメントの計算等の量子電磁理論の予言の成功は, くりこみ可能性の原理の検証とみなすことができる. 同じことは, 4 巻で論じる弱い相互作用, 電磁相互作用, 強い相互作用の標準模型にも当てはまる. この理論にクォークやレプトンの 4 体フェルミ相互作用のような様々な項を加えると, 標準模型の全ての予言が無効になってしまうが, それらの項は非くりこみ可能だという理由のみによって排除される.

表 12.2: スカラー ϕ, ディラック場 ψ, 光子の場 A^μ を含むラグランジアン密度に許されるくりこみ可能な項. ここで, n_{if} と d_i は i 種の相互作用の中の f 種の場の数と微分の数だ. また, Δ_i はその項に伴う係数の次元だ.

	n_{if}		d_i	Δ_i	$\mathcal{H}_i$
スカラー	光子	スピン $\frac{1}{2}$			
1	0	0	0	3	ϕ
2	0	0	0	2	ϕ^2
2	0	0	2	0	$\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$
3	0	0	0	1	ϕ^3
4	0	0	0	0	ϕ^4
2	1	0	1	0	$\phi\partial_\mu\phi A^\mu$
2	2	0	0	0	$\phi^2 A_\mu A^\mu$
1	0	2	0	0	$\phi\bar{\psi}\psi$
0	2	0	2	0	$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$
0	0	2	0	1	$\bar{\psi}\psi$
0	0	2	1	0	$\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$
0	1	2	0	0	$\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$

ラグランジアンはくりこみ可能な項のみを含むように制限されると信じなければならないだろうか？前の節で見たように，ラグランジアンが対称性で許される無限個の項全てを含めば，どの紫外発散にもそれを打ち消す相殺項がある．この意味で，前に述べたように，非くりこみ可能な理論はラグランジアンが可能な項をすべて含めば，くりこみ可能な理論と同じようにくりこみ可能だ．

近年になって，くりこみ可能性は基本的な物理的要請ではなく，むしろ，どのような現実的な場の量子論もくりこみ可能な項のみならず非くりこみ可能な項も含んでいることが，ますます明らかになってきた．この視点の変化は，一つには，重力のくりこみ可能な理論が発見できずにいることにもよる．アインシュタインの等価原理を満たす重力の一般的な計量理論で，くりこみ可能な相互作用は全く存在しない．一般共変な相互作用は曲率テンソルとその一般共変微分から作らなければならず，重力子のプロパゲーターが k^{-2} の振舞いをする「ゲージ」でさえ，相互作用は計量の微分を多く含み過ぎて，くりこみ可能でない．特に，一般相対性理論は，その結合定数 $8\pi G_N = (2.43 \times 10^{18}\ \mathrm{GeV})^{-2}$ が負の次元を持つことから簡単に非くりこみ可能だとわかる．もし，他の何にも要請されなくとも，仮想重力子による発散を打ち消すためにだけでも，ラグランジアンは重力子だけでなく他の粒子も含む，対称性から許される全ての相互作用を含まなければならない．

しかし，もしくりこみ可能性が基本的な物理原理でないとしたら，量子電磁理論や標準模型のようなくりこみ可能な理論の成功をどう説明したらよいだろうか？その答えは簡単な次元解析で得られる．i 種の相互作用の結合定数は，Δ_i を (12.1.9) の指標として，

$$[g_i] \sim [\mathrm{mass}]^{\Delta_i} \tag{12.3.1}$$

の次元を持つことはすでに見た．非くりこみ可能な相互作用はその結合定数の質量の冪が負の次元を持つものだ．さて，(12.3.1) より，結合

定数は Δ_i で決まる次元を持つばかりでなく, M をある共通の質量として, ほぼ,

$$g_i \approx M^{\Delta_i} \tag{12.3.2}$$

の大きさを持つとしてもおかしくはない. (これは後述する有効場の理論では実際に成り立っており, 3 巻でより詳しく調べる.) 特徴的な運動量の大きさが $k \ll M$ である物理的な過程を計算する際に, i 種の $\Delta_i < 0$ となる非くりこみ可能な相互作用を含めると, $g_i \approx M^{\Delta_i}$ の因子が加わる. しかし, 次元勘定からいって, これには $k^{-\Delta_i}$ の因子が伴い, $k \ll M$ のときに $(k/M)^{-\Delta_i} \ll 1$ となって, そのような相互作用は効かないことがわかる.* (この議論は 3 巻でくりこみ群の方法を使ってより詳しく行う.) 電弱相互作用と強い相互作用のくりこみ可能な理論は, 単に, これらの理論をテストしてきたエネルギーの大きさより M が非常に大きいことによって成功してきた.

例えば, 電子かミュー中間子の通常の電磁理論での非くりこみ可能な補正で主要なものは, 次元 5 のものであり, ただ一つの $1/M$ の因子で抑えられている. そのような相互作用のうち, ローレンツ不変性, ゲージ不変性, CP 不変性から許されるものは, ただ一つ, $(ie/2M)\,\bar{\psi}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi\ F^{\mu\nu}$ の程度の大きさのパウリ項だ. (10.6.24), (10.6.17), (10.6.19) によれば, そのような項は電子かミュー中間子の磁気モーメントに $4e/M$ の程度の大きさの寄与をする. 電子の磁気モーメントをこの項無しで計算した値は, 実験と $10^{-10}e/2m_e$ の大きさで一致する. したがって, M はほぼ, $8 \times 10^{10} m_e = 4 \times 10^7$ GeV よ

---

*ここで, 紫外発散はくりこみで取り除かれていて, 紫外切断定数 Λ が因子に入って次元解析を狂わせないことが重要だ. そうでないと, 次元解析から, 非くりこみ可能な $\Delta_i < 0$ の結合定数 g_i が一つ加わるたびに, $\Lambda \to \infty$ で増大する因子 $\Lambda^{-\Delta_i}$ が入ることになる. ハイゼンベルグ[9]は非常に早い時期に, この次元の議論を使って相互作用をその次元で分類し, g_i^{1/Δ_i} の大きさのエネルギーで新しい効果が起こるかもしれないと示唆した. このエネルギーの大きさとしては, たとえば, G_F をフェルミのベータ崩壊の理論の 4 体フェルミ相互作用の結合定数として, $G_f^{-1/2} \approx 300$ GeV が考えられた. くりこみ理論が開発された後になって, 坂田達がくりこみ可能な理論とはその結合定数の次元が負のものだと気づいた.[11]

り大きくなければならない.

他の対称性により非くりこみ可能な相互作用の形が制限されれば，この限界を弱めることができる．例えば，通常の量子電磁理論のラグランジアンは，カイラル変換 $\psi \to \gamma_5\psi$ のもとで，フェルミオンの質量項 $-m\bar{\psi}\psi$ の符号が変わる以外は不変だ．もし，全ラグランジアンが形式的に $\psi \to \gamma_5\psi$, $m \to -m$ の変換のもとで不変だと要求すれば，パウリ項は余分な m/M の因子を持たねばならず，磁気モーメントへは $4em/M^2$ の程度の寄与しかしない．この m の余分な因子のために，今度は，電子ではなくミュー中間子から M についての有用な下限が得られる．ミュー中間子の計算された磁気モーメントは実験と $10^{-8}e/2m_\mu$ の大きさまで合うから，M はほぼ $\sqrt{8\times 10^8}m_\mu = 3\times 10^3$ GeV より大きくなければならない．いずれにせよ，もし M が 10^{18} GeV 程度に大きいなら，確かに量子電磁理論に現れる非くりこみ可能な相互作用を無視してもよいことになる．

これらの考察は，ラグランジアンの高次微分項に関する疑問を解決するのに役立つ．例えば，実のスカラー場 ϕ の一般的な理論では，ラグランジアン密度に $\phi\Box^n\phi$ の項があると期待される．そのような項は，直接にスカラーの自己エネルギー関数 $\Pi^*(q^2)$ に $(q^2)^n$ に比例する項をもたらす．もし，他の全ての非くりこみ可能な相互作用を無視し，この寄与だけを全ての次数に含めると，プロパゲーター $\Delta'(q^2) = 1/(q^2 + m^2 - \Pi^*(q^2))$ は 10.7 節の一般的な議論から期待される負の q^2 での 1 位の極を持たず，一般的に q^2 の複素数の値で n 個の極（それらの内，いくつかは重複してもよい）を持つことになる．しかし，もし非くりこみ可能な項 $\phi\Box^n\phi$ が，$M \gg m$ として $M^{-2(n-1)}$ の大きさの係数を持てば，これらの極は q^2 が M^2 の大きさのところにある．そこではラグランジアンに現れる他の無限個の非くりこみ可能な相互作用を無視することはできない．したがって，高次微分項が一般的な非くりこみ可能なラグランジアンに現れるのは，10.7 節で使っ

た一般的な場の量子論の原理に反しない．幾度となく紫外発散を避けるために高次微分項を使うことが提唱されてきたが，これは同じ理由でうまく働かない．ラグランジアン密度の中に $M^{-2(n-1)}\phi\Box^n\phi$ の項を入れると，運動量が $q^2 \approx M^2$ のところで切断として働くが，この運動量の大きさのところでは，存在するはずの他のすべての非くりこみ可能な相互作用を無視することはできない．

非常に抑えられているとはいえ，非くりこみ可能な相互作用はそれが無ければ禁止されているような効果があれば，観測にかかる可能性がある．例えば 12.5 節では，ゲージ不変性，ローレンツ不変性，くりこみ可能性を満たす電磁相互作用の構造から自動的に荷電共役対称性と空間反転対称性が成立することをみる．しかし，例えば，電子の電気双極子モーメント $\bar{\psi}\gamma_5\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right]\psi F^{\mu\nu}$ や，フェルミ相互作用 $\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ のような，これらの対称性を破る非くりこみ可能な項も考えることができる．今日では重粒子数と軽粒子数の保存則は，非常に小さい非くりこみ可能な相互作用で破られていると広く信じられている．他の測定可能な非くりこみ可能な相互作用の例は重力だ．前に述べたように，重力子はくりこみ可能な相互作用を一切持たない．しかし，もちろん，マクロな大きさの物体を作る全ての粒子の重力場はコヒーレントに足し合わされるという特別な性質のために，重力は観測される．

非くりこみ可能な理論は，自由パラメータを無限個含むが，予言能力は十分持っている.[12] それは前の節の初めの 1 次元の例の $\ln q$ と $q \ln q$ の項のように，ファインマン振幅の非解析的な部分を計算することができるということだ．そのような計算は，S 行列はユニタリー性から必要とされる特異性しか持たないという S 行列理論の公理を満たす結果をちょうど与える．

逆説的なことに，対称性がくりこみ可能な相互作用を禁じるときにこそ，非くりこみ可能な場の量子論がもっとも役に立つ．そのような場合には，k/M の冪で展開することにより有用な摂動論が導ける．これ

は3巻で詳しく論じる低エネルギーのパイオン[12,13]と, 低エネルギーの重力子[14]について詳細に調べられている. より単純な例として, 実スカラー場が場の並進,

$$\phi(x) \to \phi(x) + \epsilon$$

(ϵ は任意の定数) で不変な理論を考える. この対称性は, どのようなくりこみ可能な相互作用もスカラーの質量も禁止するが, 無限個の非くりこみ可能な微分相互作用,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{g}{4}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)^2 - \cdots$$

を許す. ここで, $g \approx M^{-4}$ であり, 「$\cdots$」はより多くの微分や場を含む項を意味する. (単純にするために, ここで, 理論は $\phi \to -\phi$ の鏡映対称性も持つとする.) 上の次元解析によれば, 全てのエネルギーと運動量が $k \ll M$ の大きさの一般の反応のダイアグラムは, $(k/M)^\nu$ の因子で抑えられている. ここで, n_i と d_i を i 種の相互作用のスカラー場の個数と微分の個数とし, V_i をそのダイアグラム内の相互作用の頂点の個数とすると,

$$\nu = -\sum_i V_i\Delta_i = \sum_i V_i(d_i + n_i - 4)$$

だ. $k \ll M$ では, どの過程においても, もっとも効くのは ν の値が最小のものだ. ν の式は, I, E, L を, それぞれ, ダイアグラムの内線, 外線, ループの本数として, 連結ダイアグラムについて成り立つよく知られたトポロジー的な恒等式,

$$\sum_i V_i = I - L + 1\,, \qquad \sum_i V_i n_i = 2I + E$$

を使うと, 以下のより有用な形になる.

$$\nu = 2E - 4 + 4L + \sum_i V_i(d_i - n_i)\,.$$

さて, 場の並進対称性から, 全ての場は最低一つの微分を伴わなければならない. したがって, $d_i - n_i$ と V_i は全ての相互作用について負ではない. これより, ある与えられた過程について (すなわち, 外線の数 E が固定されたとき), 主要な項は樹木ダイアグラム (つまり, $L=0$ のもの) で, 微分の数が $d_i = n_i$ と最少になっている相互作用から構成されたものに限られる. つまり, 主要な次数では, ラグランジアン密度を場の1次微分にのみよるとしてよい. 高次の補正は, ループや, より多くの微分が作用した場を含む相互作用からなる. しかし, k/M のどんな与えられた次数 ν でも, $L \leq (4-2E+\nu)/4$ の有限個のダイアグラムと有限個の種類の相互作用だけを考慮に入れればよい.

たとえば, スカラー・スカラー散乱は主要な次数では, $-g(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)^2$ の相互作用の頂点一つの樹木ダイアグラムで与えられる. 我々の ν の式によれば, 次に効いてくる補正は, 低エネルギーで $(k/M)^2$ の因子で抑えられているものだが, それは微分を二つ余分に含む $\partial_\mu\partial_\nu\phi\,\partial^\mu\partial^\nu\phi\,\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi$ の形の相互作用の頂点一つのダイアグラムから生じる.** 次の補正は, さらに k/M の因子が二つかかって抑えられていて, これには二つの寄与がある. その第一は, $-g(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)^2$ の相互作用のみを使って計算された 12.4 図の 1 ループ・ダイアグラム (これの外線を置換したものも含める) だ. 第二は, 微分を 8 個含む 4 次の頂点一つからなる樹木ダイアグラムであり, その結合定数はループ・ダイアグラムの紫外発散を打ち消す無限大を含んでいる.† ループ・ダイアグラムはまた, 散乱振幅に $s^4\ln s + t^4\ln t + u^4\ln u$ や $s^2t^2\ln u + t^2u^2\ln s + u^2s^2\ln t$ 等に比例する有限項を与える. その比例定数は g^2 に比例し, 計算できる量だ. これらの有限項は単に S 行列

**7.7 節に述べたように, $\Box\phi$ を含む相互作用は, 場の方程式を使って他の形に表せるので, 考えない.

†次元正則化を使う限り, これらが 1 ループに現れる唯一の発散だ. 他の正則化の方法を使うと, 2 次と 4 次の発散が生じ, それらは, 4 個か 6 個の微分を持つ 4 スカラー相互作用の相殺項で打ち消される.

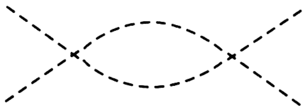


図 12.4: 微分 4 次相互作用を持つ理論でのスカラー・スカラー散乱の 1 ループダイアグラム.

のユニタリー性を保証するために必要な最低次の散乱振幅への補正を表すだけだが, 摂動論的場の量子論を使う方がはるかに簡単に計算できる.

非くりこみ可能な理論はエネルギーでの展開を与えるという点で有用だが, 種々の結合を特徴付ける共通の質量 M とエネルギーが同じ程度の大きさのときには必然的に予言力を失う. もし, この展開を文字どおりとるなら, S 行列要素の結果は $E \gg M$ でユニタリー限界を破ることになる. このエネルギーで起こることには, 二つの可能性しかないように思える. その一つは, 何らかの理由によって, 非くりこみ可能な結合の影響が飽和, つまり, それ以上大きくならずに, ユニタリー性と矛盾しないという可能性だ.[15] もう一つは, M の大きさのエネルギーで, なんらかの新しい物理が登場することだ. この場合には, $E \ll M$ のエネルギーで自然を記述する非くりこみ可能な理論は, 真に基本的な理論ではなく, 単に, **有効場の理論** (effective field theory) になっている.

有効場の理論のもっとも初期の例は, おそらく, 1930 年代にオイラー達[16]によって導かれた低エネルギーの光子・光子相互作用の理論だろう. (1.3 節を見よ.) 彼らは, 12.5 図のような光子・光子散乱のファインマン・ダイアグラムを実質上計算し, m_e より非常に小さいエネルギーでは光の光による散乱は以下の有効ラグランジアンから得られ

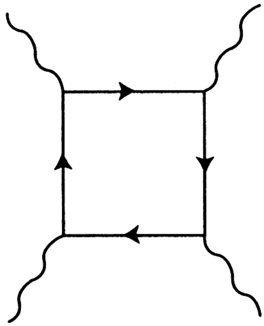


図 12.5: 光子・光子散乱のダイアグラム. この効果は低エネルギーではオイラー達[16]の有効ラグランジアンから計算されるものと同じだ. 直線は電子, 波線は光子を意味する.

るものと同じであることを発見した.

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{2\alpha^2}{45m_e^4}\left[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2\right] + \left[\frac{eE}{m_e^2} \text{ と } \frac{eB}{m_e^2} \text{ について高次の項}\right].$$

オイラー達はこの有効ラグランジアンを樹木近似でのみ使って, 光子相互作用の行列要素の主要な項を計算した. ずいぶん後になって, このようなラグランジアンは非くりこみ可能であるにもかかわらず, 樹木近似を越えて使われた.[12,17]

現代の用語を使えば, このラグランジアンを導くのには電子を「積分した」という. これは, 1 ループ近似では,

$$\exp\left(i\int \mathcal{L}_{\text{eff}}(\mathbf{E},\mathbf{B})d^4x\right) = \int\left[\prod_x d\psi_e(x)\right]\exp\left(i\int \mathcal{L}_{\text{QED}}(\psi_e,\mathbf{A})d^4x\right)$$

だからだ. より一般的には, 単にもっとも一般的な非くりこみ可能な有

効ラグランジアンを書き下し, それを使って様々な振幅をエネルギーと運動量の展開として計算し, その結果を基本的な理論から計算したものと合うように有効ラグランジアンの中の定数を決めればよい.

有効場の理論には後でもう一度, 特に3巻で破れた対称性を考察する際に出会う. 後で見るように, 基本理論が知られていないか, もしくは, その相互作用が強くて摂動論が使えないために有効場の理論が基本理論から導けなくても, 有効場の理論は有用だ. 実際, 荷電粒子の性質について何も知らなくとも, 充分に低いエネルギーでの光子の散乱は, $(\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2)^2$ と $(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2$ からなる有効ラグランジアンで記述されなければならない. これは, 微分が $\mathbf{E}$ にも $\mathbf{B}$ にもかかわらず, ローレンツ不変でゲージ不変な4次の項としてはこれしかないからだ. 微分のある項はエネルギー E が低いとき, 積分される荷電粒子の典型的な質量を M として, E/M の因子で抑えられる. さらに進んで, 有効場の理論は, それが記述する軽い粒子が基本理論に全く無く, 積分される重い粒子の束縛状態である場合でも有効なことがわかる. 基本理論は全く場の理論で無くともよい. 実際, 重力を取り入れる際の困難から, 多くの理論家は, その基本理論は弦理論だと考えるようになった. いずれにせよ, 有効場の理論の起源が何であれ, 有効場の理論は必然的に非くりこみ可能な理論だ.

12.4 浮動する切断定数*

この章を終わる前に, 通常のくりこみ理論と, ウィルソン (Wilson) によって開発されたくりこみ[18]の関係について述べる. ウィルソンの方法では, 運動量の成分が Λ の大きさを持つところで (鋭く, または滑らかな) 有限の「浮動する」紫外切断を課す. そして, $\Lambda\to\infty$ とす

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

る代わりに, 全ての観測量が Λ に依存しないように, 理論の裸の定数 (ラグランジアンに現れるもの) を Λ に依存させる.

無次元量を使うのが便利だ. もし, 裸の結合定数か質量パラメータ $g_i(\Lambda)$ が $[質量]^{\Delta_i}$ の次元を持つなら, 対応する無次元のパラメータ $\mathcal{G}_i$ を,

$$\mathcal{G}_i(\Lambda) \equiv \Lambda^{-\Delta_i} g_i(\Lambda) \tag{12.4.1}$$

で定義する. 通常の次元解析から, 切断定数が Λ' の値のときの $\mathcal{G}_i$ の値は, 切断定数が別の Λ の値のときの $\mathcal{G}_j$ の値および, 無次元の比 Λ'/Λ の関数として表されることがわかる.

$$\mathcal{G}_i(\Lambda') = F_i\Big(\mathcal{G}(\Lambda), \Lambda'/\Lambda\Big) \, . \tag{12.4.2}$$

Λ' と Λ 以外の次元のあるパラメータは F に現れることができない. これは, Λ での定数の値と Λ' での値の差は内線が Λ と Λ' の間の運動量を持つダイアグラムから生じるから, 紫外発散も赤外発散もここには登場しないからだ. (12.4.2) を Λ' について微分し, Λ' を Λ に等しくすると, $\mathcal{G}_i$ に関する微分方程式が以下のように得られる.

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \mathcal{G}_i(\Lambda) = \beta_i(\mathcal{G}(\Lambda)) \, . \tag{12.4.3}$$

ここで, $\beta_i(\mathcal{G}) \equiv [\partial/\partial z \, F_i(\mathcal{G}, z)]_{z=1}$ だ. 関数 $\beta_i(\mathcal{G})$ は結合定数が小さいときには摂動論で計算できる. これが, ウィルソン流の「くりこみ群」方程式だ. これについては, 多少異なるやり方で 3 巻で論じる.

切断定数が有限な任意の値のときのラグランジアンは有効場の理論を定義する. この理論では, オイラー達の仕事のように電子のような「重い」粒子を積分する代わりに (または, それに加えて) 運動量が Λ より大きな全ての粒子を積分している. ある切断定数 Λ_0 で有限個の結合パラメータ $\mathcal{G}_i^0$ から出発しても, 切断定数が他の任意の値のときに, 微分方程式 (12.4.3) は一般に対称性原理から許される全ての結合

についてゼロでない値を与える.**

ここでくりこみ可能な結合定数と非くりこみ可能な結合定数を区別して, それぞれ, $\mathcal{G}_a$ と $\mathcal{G}_n$ と表す. ここで, a は $\Delta_a \geq 0$ の N 個の有限な個数の結合定数 (質量を含む) を示す添字で, n は次元が $\Delta_n < 0$ の無限個の結合定数を示す. もし, ある最初の切断定数の値 Λ_0 での結合定数 $\mathcal{G}_a(\Lambda_0)$ と $\mathcal{G}_n(\Lambda_0)$ が一般的な N 次元の初期表面 $\mathcal{S}_0$ 上にあるなら, (ある限定条件はあるものの) それらは $\Lambda \ll \Lambda_0$ では, Λ_0 にも初期表面にも依存しない固定表面 $\mathcal{S}$ に近づくことを示す.† この固定表面は, その表面上のどの点から出発しても (12.4.3) で決まる軌跡はその表面上に留まるという意味で, 安定だ. そのような安定表面は, 有限個のパラメータを持った理論を定義し, その物理的な内容は切断定数に依存しない. これは, 前の節で論じたように, くりこみ可能な理論の本質的な性質だ. さらに, この構成によれば, 切断定数が Λ_0 で定義された一般的な理論は, $\Lambda \ll \Lambda_0$ でくりこみ可能な理論に見える.‡

これらの結果を証明するために, (12.4.3) を満たしながら, $\mathcal{G}_i(\Lambda)$ の値に任意の小さな摂動 $\delta\mathcal{G}_i(\Lambda)$ を加える. その摂動は, 以下の微分方程式を満たす.

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda}\delta\mathcal{G}_i(\lambda) = \sum_j M_{ij}(\mathcal{G}(\Lambda))\,\delta\mathcal{G}_j(\Lambda)\,. \tag{12.4.4}$$

ここで, 以下の定義を使った.

$$M_{ij}(\mathcal{G}) \equiv \frac{\partial}{\partial\mathcal{G}_j}\beta_i(\mathcal{G})\,. \tag{12.4.5}$$

この方程式は, くりこみ可能な結合定数と非くりこみ可能な結合定数

**この法則の例外としては, 超対称性のみが知られている.[4]

†この定理はポルチンスキーによる.[19] 以下では, それを簡略化した, それほど厳密でない説明を与える. (ポルチンスキーの証明では, 初期表面は全ての非くりこみ可能な結合定数がゼロとなるものがとられた. ここで見るように, 初期表面が一般的なものでも, 結合定数は同じ固定表面に近づく.)

‡もちろん, 対称性や場の性質により, どのようなくりこみ可能な相互作用も存在しないような理論もある. これは, フェルミオン場しか含まない理論や, 重力場しか含まない理論がそうだ. そのような理論は $\Lambda \ll \Lambda_0$ では, 自由場の理論のように見える.

を混ぜているので, それらの振舞いの違いが見えにくい. それらを分離するために, 線形結合,

$$\xi_n \equiv \delta\mathcal{G}_n - \sum_{ab} \frac{\partial \mathcal{G}_n}{\partial \mathcal{G}^0_a} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{G}^0}\right)^{-1}_{ab} \delta\mathcal{G}_b \tag{12.4.6}$$

を導入する. ここで, $\mathcal{G}^0_a$ は切断定数 Λ_0 でのくりこみ可能な結合定数の値で, これを初期表面の座標として使う. また, $\mathcal{G}_n$ は切断定数 Λ での非くりこみ可能な結合定数の値であり, これは, 微分方程式 (12.4.3) において Λ_0 での初期値として初期表面上で座標 $\mathcal{G}^0_a$ を持つ点を選んで導く. ξ_n の Λ についての微分を計算するには, 微分 $\partial\mathcal{G}_i/\partial\mathcal{G}^0_a$ が $\delta\mathcal{G}_i$ と同じ微分方程式 (12.4.4) を満たすことを使う. 以下を示すのは初等的な演習だ.

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \xi_n = \sum_m N_{nm}\, \xi_m \,. \tag{12.4.7}$$

ここで,

$$N_{nm} \equiv M_{nm} - \sum_{ab} \frac{\partial \mathcal{G}_n}{\partial \mathcal{G}^0_a} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{G}^0}\right)^{-1}_{ab} M_{bm} \tag{12.4.8}$$

という定義を使った. さて, N_{nm} の成分を求めなければならない. 自由場の理論では切断は必要ない. したがって, 結合定数が非常に小さなときは, 全ての裸の結合定数 $g_i(\Lambda)$ は Λ に依存しなくなる. したがって, 結合定数が小さなときには, 無次元のパラメータ $\mathcal{G}_i$ は単に $\Lambda^{-\Delta_i}$ のように振舞い, 行列 M_{ij} は,

$$M_{ij} \approx -\Delta_i \delta_{ij} \tag{12.4.9}$$

と与えられる. これより, 行列 N_{nm} は $-\Delta_n\delta_{nm}$ と近似できる. 非くりこみ可能な結合定数は, $\Delta_n < 0$ という特徴で定義される. したがって, (12.4.7) より, 少なくとも結合定数の N_{nm} が正定値となる有限領域で, ξ_n は $\Lambda \ll \Lambda_0$ のときに Λ/Λ_0 の正冪で小さくなることがわか

る. この極限では, 摂動は以下の関係をしている.

$$\delta\mathcal{G}_n = \sum_{ab} \frac{\partial \mathcal{G}_n}{\partial \mathcal{G}^0_a} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{G}^0} \right)^{-1}_{ab} \delta\mathcal{G}_b \,. \tag{12.4.10}$$

特に, もしある切断定数 $\Lambda \ll \Lambda_0$ でのくりこみ可能な結合定数の摂動 $\delta\mathcal{G}_a$ がゼロとなるように, 初期表面 $\mathcal{S}_0$ や, その上の出発点や, 初期切断定数 Λ_0 に小さな変更を加えると, 切断定数 Λ での他の全ての結合定数の摂動 $\delta\mathcal{G}_n$ もゼロとなる. したがって, $\Lambda \ll \Lambda_0$ では非くりこみ可能な結合定数 $\mathcal{G}_n(\Lambda)$ はくりこみ可能な結合定数 $\mathcal{G}_a(\Lambda)$ にのみ依存でき, 初期表面や, その表面の上の出発点や, 初期の切断定数 Λ_0 に個々に依存することはできない. これにより, 切断定数 $\Lambda \ll \Lambda_0$ では, 全ての結合定数は, 座標 $\mathcal{G}_a(\Lambda)$ で与えられる N 次元表面 $\mathcal{S}$ に近付き, これは初期表面にも Λ_0 にも依らない. 非くりこみ可能な結合定数 $\mathcal{G}_n$ は一般的に $\mathcal{S}$ 上で小さくはないことに注意しておく. 重要なことは, それらがくりこみ可能な結合定数の関数になることだ. Λ が Λ_0 より非常に小さいまま, Λ を変えると, 結合定数も変わるが, 結合定数は $\mathcal{S}$ 近くに留まる. (これは, 結合定数が大きくなりすぎて N_{nm} が正定値行列でなくなってしまわない限り正しい.) したがって, $\mathcal{S}$ は安定表面だ. これで証明ができた.

全ての物理量が Λ と $\mathcal{G}_a(\Lambda)$ を使って表され, Λ には依存しないことをみた. これは, 特に, 量子電磁理論の e と m_e のように, N 個の通常のくりこまれた結合定数と質量について正しい. しかし, それなら, この関係を逆にして, $\mathcal{G}_n(\Lambda)$ を通常のパラメータと Λ を使って表すこともできる. こうすると, 通常のくりこみ法が正当化できる. つまり, 全ての物理量は, 通常のようにくりこまれた結合定数と質量を使って, 切断定数に依存せずに表される.

ウィルソンの方法は, 実際の使用に際して利点がある. それは, 運動量の切断は全ての内線に適用されるから, 副次的な積分や重複発散について悩む必要がないことだ. また, 超対称性理論で, 結合定数のいく

つかが輻射補正を受けないという非くりこみ定理は, 切断定数に依存する裸の結合定数についてのみ適用できる.[20]

一方, ウィルソンの方法には不利な点もある. 量子電磁理論のようなくりこみ可能な理論を扱うのは非常に簡単だが, これを諦めなければならないことがそうだ. Λ 以上の運動量の粒子を積分すると, その結果得られる有効場の理論は Λ に依存する全てのローレンツ不変でゲージ不変な相互作用を含む. (しかしながら, エネルギーが $E \ll \Lambda$ の物理的な過程では, 主要な結合定数は依然としてくりこみ可能なものだ.) また, 切断は一般的に明白なゲージ不変性を破るし, 明白なローレンツ不変性かユニタリー性も破る. これらはいずれも, もともとウィルソンの方法が開発された物性理論では問題とならない. これは, 現実的な物性理論が厳密にくりこみ可能だとは誰も思わないし, 切断によって破られる物理的な基本原理もないからだ. 実際, 結晶では, フォノンの運動量には, 格子定数の逆数からくる切断定数が存在する.

結局のところ, 通常の方法とウィルソンの方法の違いは, 数学的な便利さにあって, 物理的な解釈についてのものではない. 実際, 通常のくりこみはすでに調整可能な切断定数のようなものを提供している. (前の節で論じたスカラー場の理論のように) μ の大きさの運動量での物理的振幅の値で定義された結合定数を使って結果を表すと, 積分を収束させる相殺は, 仮想運動量が μ の大きさのところで効き始める. 逆に言えば, ウィルソン流のやり方の Λ に依存する結合定数は, 最終的には観測にかかる質量や電荷で表さなければならず, これを行うと, もちろん通常の方法で得られた結果と同じとなる.

12.5 偶発的対称性*

12.3 節では, 自然を充分に低いエネルギーで近似的に表すのにくりこみ可能な理論を採用するのがよい理由があるのを見てきた. しばしば, くりこみ可能性の条件が厳しいために有効ラグランジアンが1つ以上の対称性を自動的に満たすことがある. この対称性は基本理論の対称性ではなく, 有効ラグランジアンでは大きさが抑えられている非くりこみ可能項で破れている場合がある. 実際, 素粒子論で実験的に発見されたほとんどの対称性はこの類の「偶発的対称性」だ.

典型的な例は, 荷電レプトンの電磁理論での反転対称性とフレーバー保存だ. 光子と, スピン $\frac{1}{2}$ で電荷が $-e$ の場のもっとも一般的なくりこみ可能でゲージ不変, ローレンツ不変なラグランジアンは, 以下の形をとる.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\tfrac{1}{4}\, Z_3 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &-\sum_{ij} Z_{Lij}\bar{\psi}_{Li}[\not{\partial} + ie\,\not{A}]\psi_{Lj} - \sum_{ij} Z_{Rij}\bar{\psi}_{Ri}[\not{\partial} + ie\,\not{A}]\psi_{Rj} \\ &-\sum_{ij} M_{ij}\bar{\psi}_{Li}\psi_{Rj} - \sum_{ij} M^{\dagger}_{ij}\bar{\psi}_{Ri}\psi_{Lj}\,. \end{aligned} \tag{12.5.1}$$

ここで, i, j は三つのレプトンのフレーバー (e, μ, τ) について和をとり, ψ_{iL} と ψ_{iR} は場 ψ_i の以下で定義される右手成分と左手成分だ.

$$\psi_{Li} = \tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi_i\,, \quad \psi_{Ri} = \tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi_i\,. \tag{12.5.2}$$

また, Z_L, Z_R, M は数値行列だ. レプトンのフレーバー保存については何も仮定していないので, 行列 Z_{Lij}, Z_{Rij}, M_{ij} は対角である必要はない. また, P, C, T の各不変性についても何も仮定していないので, Z_L と Z_R の間や M と $M^\dagger$ の間に関係がある必要はない. これら

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

の行列についての唯一の拘束条件は, ラグランジアン密度が実であることで, これより Z_{Lij} と Z_{Rij} がエルミートとなり, また, 正準反交換関係より Z_{Lij} と Z_{Rij} が正定値となる.

さて, レプトン場 ψ_L と ψ_R を, 以下で定義される新しい場 ψ'_L と ψ'_R で置き換えることにする.

$$\psi_L = S_L\psi'_L\,, \qquad \psi_R = S_R\psi'_R\,. \tag{12.5.3}$$

ここで, $S_{L,R}$ は任意に選べる正則行列だ. これらの新しい場でラグランジアン密度を表すと, (12.5.1) で新しい行列,

$$Z'_L = S_L^\dagger Z_L S_L\,, \quad Z'_R = S_R^\dagger Z_R S_R\,, \quad M' = S_L^\dagger M S_R \tag{12.5.4}$$

を使ったものになる. S_L と S_R は, $Z'_L = Z'_R = 1$ となるように選べる. (正定値エルミート行列 $Z_{L,R}$ を対角化するユニタリー行列を $U_{L,R}$ とし, $Z_{L,R}$ の固有値の平方根の逆数を成分とする行列を $D_{L,R}$ として, $S_{L,R} = U_{L,R}D_{L,R}$ ととる.)

さらに以下の変換をしてレプトン場 ψ''_i に移る.

$$\psi'_L = S'_L\psi''_L\,, \qquad \psi'_R = S'_R\psi''_R\,. \tag{12.5.5}$$

新しい場で表すと, ラグランジアンは同じ形で, ただし新しい行列,

$$Z''_L = S'^\dagger_L S'_L\,, \qquad Z''_R = S'^\dagger_R S'_R\,, \qquad M'' = S'^\dagger_L M' S'_R \tag{12.5.6}$$

を使ったものになる. 今度は, $Z''_L = Z''_R = 1$ となるように, $S'_{L,R}$ がユニタリーになるように選ぶ. これらのユニタリー行列は, M'' が実で対角になるように選ぶ. (極分解定理により, M' は, 任意の正方行列でそうであるように, ユニタリーな V とエルミートな H を使って, $M' = VH$ と書ける. この性質を使って $S'^\dagger_L = S'^\dagger_R V^\dagger$ とし, S'_R を H を対角化するユニタリー行列に選べばよい.) プライム (′) を省略する

と, ラグランジアン密度は以下の形に書ける.

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}Z_3F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \sum_i \bar{\psi}_{Li}[\not{\partial} + ie\not{A}]\psi_{Li} - \sum_{ij} \bar{\psi}_{Ri}[\not{\partial} + ie\not{A}]\psi_{Ri}$$
$$- \sum_i m_i\bar{\psi}_{Li}\psi_{Rj} - \sum_i m_i\bar{\psi}_{Ri}\psi_{Li}\,. \tag{12.5.7}$$

ここで, m_i はエルミート行列 H の固有値であり, 実数だ. 最終的に, これはより親しみのある形,

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}\,Z_3F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \sum_i \bar{\psi}_i[\not{\partial} + ie\not{A}]\psi_i - \sum_i m_i\bar{\psi}_i\psi_j \tag{12.5.8}$$

に書ける. ラグランジアンがこの形になると, レプトンの電磁理論のどのようなくりこみ可能なラグランジアンも自動的に P, C, T を保存することが明らかとなる. また, 電子, ミュー中間子, タウ中間子の各フレーバーごとのレプトンの数 (引く反レプトンの数) の保存も明白だ.** 特に, (12.5.1) の見かけにもかかわらず, $\mu \to e + \gamma$ のような過程は禁止されている. 読者は (12.5.8) に現れる (以前には ψ_i'' と書いた) ψ_i をレプトン場とするのが正しいかどうか悩むかもしれない. この場は明らかにレプトンのフレーバーを保存し, (12.5.1) の ψ_i が $\mu \to e + \gamma$ のような過程を許すのと対照的だ. そのような心配は無用だ. 10.3 節で強調したように, 電子やミュー中間子の場として正確に確認できる場などは存在しない. 実際, (12.5.1) はレプトン 1 がレプトン 2 に輻射崩壊するゼロでない行列要素をレプトンの質量殻外で与えるが, そのような過程の S 行列要素は, (12.5.1) を使って計算しても, レプトンの運動量を質量殻上に持っていくと, ゼロとなる.

これらの結果を導く上で, (12.5.1) においてレプトン場の右手成分と左手成分の両方に共通の電荷が現れたこと, 言い換えると, レプト

** これは, 最初に, ファインバーグ (Feinberg), カビア (Kabir), 私自身[21]によって示された. ファインバーグ[22]はそれ以前に, ニュートリノが 1 種類しかない理論では, 弱い相互作用の影響で $\mu \to e + \gamma$ の反応率が観測にかかる程に大きくでることに気付いていた. この困難はニュートリノの 2 番目の種類が発見されて初めて解決した.

ン場の右手成分と左手成分が電磁ゲージ変換のもとで同じように変換したことが本質的だった. 3 巻で述べるように, 同じ理由で, 量子色力学と呼ばれる強い相互作用の現代のくりこみ可能な理論は, 自動的に C, (ある種の非摂動論的効果を除いて) P, T と, 各クォークのフレーバーについてクォークの数 (引く反クォークの数) を保存する. また, 4 巻で述べる弱電磁相互作用のくりこみ可能な標準模型の一番単純なものでは, 電磁理論について述べたのと同様の理由で, 自動的にレプトンのフレーバー (C と P はだめだが) が保存されることを見る. より大きな質量スケールから起こる非くりこみ可能な相互作用がこれらの保存則のいずれかを破る可能性は依然として残っている.

問題

1. 時空の次元が, 2, 3, 6 のそれぞれの場合について, 一つのスカラー場で構成されている全てのくりこみ可能 (または, 超くりこみ可能) でローレンツ不変なラグランジアンの項をすべて挙げよ.

2. 量子電磁理論で, 電子の自己エネルギーの重複発散がどのように相殺されるかを示せ.

3. スカラー場 ϕ とスピノル場 ψ について相互作用ハミルトニアン $g\phi\bar{\psi}\psi$ を持つ理論を考える. スカラー場の自己エネルギー関数 $\Pi^*(q)$ の 1 ループ部分を p^μ についての発散多項式と, 陽に収束する積分の和として書き下せ.

4. 電子と光子の量子電磁理論が, 実際には $M \gg m_e$ の質量を持つ未知の粒子を積分して得られる有効場の理論だとする. ゲージ不変性とローレンツ不変性を仮定するが, C, P, T 不変性は仮定

しない. ラグランジアンの $1/M$ について主要な次数の非くりこみ可能な項は何か？また, その次に主要となる項は何か？

参考文献

1. F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75**, 486, 1736 (1949). 歴史的な概観は, *Renormalization*, L. M. Brown 編 (Springer-Verlag, New York, 1993) にある. 首尾一貫した現代的な取り扱いは J. Collins, *Renormalization* (Cambridge University Press, Cambridge, 1984) にある.

2. S. Weinberg, *Phys. Rev.* **118**, 838 (1959). この証明は, ファインマン・ダイアグラムで全ての積分経路をウィック回転して得られるユークリッド運動量空間での被積分関数の一般的な漸近的振舞いだけによっている. この証明は, Y. Hahn and W. Zimmerman, *Commun. Math. Phys.* **10**, 330 (1968) で被積分関数のより詳細な性質を使って簡単化された. そして, W. Zimmerman, *Commun. Math. Phys.* **11**, 1 (1968) でミンコフスキー運動量空間にも拡張された.

3. J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill, New York, 1965): 19.10 節と 19.11 節.

4. 例えば, J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton University Press, Princeton, 1983) とそこに引用されている原論文を見よ.

5. A. Salam, *Phys. Rev.* **82**, 217 (1951); *Phys. Rev.* **84**, 426 (1951); P. T. Matthews and A. Salam, *Phys. Rev.* **94**, 185 (1954).

6. N. N. Bogoliubov and O. Parasiuk, *Acta Math.* **97**, 227 (1957)

7. K. Hepp, *Comm. Math. Phys.* **2**, 301 (1966). ヘップは，「(ボゴリューボフとパラシークの) 証明の本質的なステップの理解が同型 (isomorphic) な理論家を二人見つけるのは困難だ」と述べているが，ヘップの論文も読みやすいものではない.

8. W. Zimmerman, *Comm. Math. Phys.* **15**, 208 (1969). また, W. Zimmerman の *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory — Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics* (M.I.T. Press, Cambridge, 1970) にある文献も見よ.

9. W. Heisenberg, *Z. Physik* **110**, 251 (1938).

10. W. Heisenberg, 参考文献 6 と *Z. Physik* **113**, 61 (1939).

11. S. Sakata, H. Umezawa, and S. Kamefuchi, *Prog. Theor. Phys.* **7**, 327 (1952).

12. S. Weinberg, *Physica* **96A**, 327 (1979)

13. J. Gasser and H. Leutwyler, *Ann. Phys.* (NY) **158**, 142 (1984); *Nucl. Phys.* **B250**, 465 (1985).

14. J. F. Donoghue, *Phys. Rev.* **D 50**, 3874 (1994).

15. これが起こり得る一つの例は，「漸近的安全性」(asymptotic safety) の現象を通してだ. S. Weinberg, in *General Relativity — An Einstein Centenary Survey*, S. W. Hawking, W. Israel 編 (Cambridge University Press, Cambridge, 1979) 16.3 節を見よ.

16. H. Euler and B. Kockel, *Naturwiss.* **23**, 246 (1935); W. Heisenberg and H. Euler, *Z. Physik* **98**, 714 (1936).

17. オイラー達の有効ラグランジアンは, J. Halter, *Phys. Lett.* **B 316**, 155 (1993) で 1 ループ計算に使われた.

18. K. G. Wilson, *Phys. Rev.* **B4**, 3174, 3184 (1971); *Rev. Mod. Phys.* **47**, 773 (1975).

19. J. Polchinski, *Nucl. Phys.* **B231**, 269 (1984); *Recent Directions in Particle Theory — Proceedings of the 1992 TASI Conference* での講義録, J. Harvey, J. Polchinski 編 (World Scientific, Singapore, 1993) p. 235.

20. V. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, *Nucl. Phys.* **B229**, 381 (1983); M. A. Shifman and A. I. Vainshtein, *Nucl. Phys.* **B277**, 456 (1986) とその参考文献. また, M. A. Shifman and A. I. Vainshtein, *Nucl. Phys.* **B359**, 571 (1991) も見よ.

21. G. Feinberg, P. Kabir, and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 527 (1959).

22. G. Feinberg, *Phys. Rev.* **110**, 1482 (1958).

第 13 章

赤外効果

輻射補正を調べる際に「軟」光子すなわち, 問題となっている過程に特徴的な質量やエネルギーに比べてそのエネルギーと運動量がずっと小さい光子による補正は特別な役割を果たしている. これらの補正は非常に大きくて摂動論の全次数にわたって和をとらねばならないことが多いが, その補正は単純なのでこの和をとるのは難しくない. 無限に長い波長の光子からの寄与は発散積分の形をとるが, 後で見るようにこの「赤外発散」はすべて相殺する.[1]

この章の大部分では, 任意の種類と任意のスピンの荷電粒子と相互作用する光子を扱う. この荷電粒子には電磁相互作用だけでなく強い相互作用もする原子核のような粒子も含まれる. しかし, ここで示す計算を量子色力学でのグルーオンのような他の質量ゼロ粒子の赤外効果に応用するのは難しいことではない. 13.4 節では質量ゼロ粒子の非常に一般的な理論を具体的に考察し, 赤外発散の相殺を一般的な根拠に基づいて示す.

この一般論の後に, 光子の問題に戻り, 実用上重要な二つの話題を取り上げる. 一つは任意の非電磁的相互作用と任意のスピンとを持つ荷電粒子による軟光子の散乱で, もう一つは原子核のような外部電磁

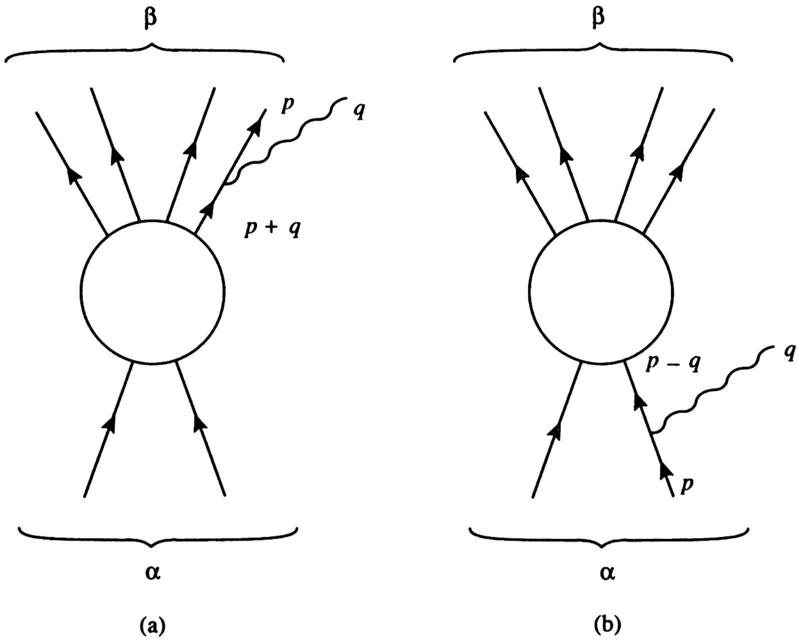


図 13.1: 任意の過程 $\alpha \to \beta$ での軟光子放出の主要なダイアグラム. 直線は状態 α と β の粒子を表わす (高エネルギー光子がある場合はそれも含む). 波線は軟光子を表わす.

場の源としての重い荷電粒子の取り扱いだ.

13.1　軟光子を含む振幅

この節では, 任意の種類の高エネルギー荷電粒子を任意個含む過程 $\alpha \to \beta$ において非常に低エネルギーの光子を任意個放出する振幅を与える一般式を導く.

まず, 1 個だけの軟光子を放出する振幅から始めよう. 図 13.1(a) の

ように過程 $\alpha \to \beta$ の連結ファインマン・ダイアグラムから出て行く荷電粒子の線に, 出て行く運動量 q と偏極の添字 μ を持つ軟光子の線を付加する. すると, $\alpha \to \beta$ の S 行列に, 光子を放出する以前の運動量 $p+q$ を持つ荷電粒子のプロパゲーターと新しい荷電粒子・光子頂点の寄与とを余分にかけなければならない. スピン・ゼロ, 質量 m, 電荷 $+e$ の荷電粒子の場合, この因子は,

$$\left[i(2\pi)^4 e(2p^\mu + q^\mu)\right]\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{1}{(p+q)^2+m^2-i\epsilon}\right]$$

で, これは $q \to 0$ の極限で,

$$\frac{e\,p^\mu}{p\cdot q - i\epsilon} \tag{13.1.1}$$

となる. (正の微少量 ϵ の大きさは, 符号を正しく保持するように注意さえしておけば, 自由に再定義してよい.) この結果は実際任意のスピンの荷電粒子についても正しい. 例えば, スピン $\frac{1}{2}$ で電荷 $+e$ の粒子の場合, 出て行く荷電粒子の係数関数 $\bar{u}(\mathbf{p},\sigma)$ を,

$$\bar{u}(\mathbf{p},\sigma)\left[-(2\pi)^4 e\gamma^\mu\right]\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{-i(\not{p}+\not{q})+m}{(p+q)^2+m^2-i\epsilon}\right]$$

で置き換えねばならない. 極限 $q \to 0$ で, プロパゲーターの分子はディアード (dyad) の和,

$$-i\,\not{p}+m = 2p^0\sum_{\sigma'} u(\mathbf{p},\sigma')\,\bar{u}(\mathbf{p},\sigma')$$

で与えられ, よって γ^μ 行列を同一運動量の状態ではさんだ行列要素,

$$\bar{u}(\mathbf{p},\sigma)\gamma^\mu u(\mathbf{p},\sigma') = -i\delta_{\sigma,\sigma'}p^\mu/p^0$$

の和が得られ, 結果としてこの場合も過程 $\alpha \to \beta$ の行列要素に因子 (13.1.1) がかかる. もっと一般的に任意のスピンの場合には, $q \to 0$ の極限で荷電粒子の新しい内線の 4 元運動量 $p+q$ は質量殻に近づくの

で, プロパゲーターの分子は係数関数のディアードの和に近づき, それは新しい頂点行列を p^μ とヘリシティの足に関する単位行列とに比例する因子に変え, この場合も因子 (13.1.1) が出てくる. さらに, 10 章で見たように, 高次補正はプロパゲーターの質量殻での極の留数にも同一運動量状態ではさんだ電流の行列要素にも影響しないので, (13.1.1) は, 摂動論の全次数で, 出て行く荷電粒子の線からの軟光子の放出にともなう正しい補正因子になっている.

同じ議論が過程 $\alpha \to \beta$ で入って来る荷電粒子の線から放出される光子についても成り立つ. ただし, 入って来る荷電粒子は, 4 元運動量 q の光子を放出した後, 4 元運動量 $p-q$ を持つので, (13.1.1) の代わりに因子,

$$\frac{e\,p^\mu}{-p\cdot q - i\epsilon} \tag{13.1.2}$$

が得られる. 光子はもちろん過程 $\alpha \to \beta$ の内線からも放出されるが, この場合 $q \to 0$ で $(p\cdot q)^{-1}$ と振舞う因子は存在しない. よって, 過程 $\alpha \to \beta$ で 4 元運動量 q と偏極の添字 μ を持つ 1 個の軟光子を放出する振幅 $M^\mu_{\beta\alpha}(q)$ (S 行列からエネルギー・運動量保存のデルタ関数を取り除いたもの) は, $q \to 0$ の極限で $\alpha \to \beta$ の行列要素 $M_{\beta\alpha}$ に, (13.1.1) と (13.1.2) のような項を出て行く荷電粒子と入って来る荷電粒子の各々について 1 個づつ足し合わせたものをかけて得られる.

$$M^\mu_{\beta\alpha}(q) \to M_{\beta\alpha}\sum_n \frac{\eta_n e_n\, p_n^\mu}{p_n\cdot q - i\eta_n\epsilon}\,. \tag{13.1.3}$$

ここで p_n と $+e_n$ は始状態および終状態の n 番目の粒子の 4 元運動量と電荷で, η_n は終状態 β の粒子については $+1$, 始状態 α の粒子については -1 の値をとる符号因子だ.

2 個以上の軟光子放出の考察に進む前に, 式 (13.1.3) の重要な特徴 [2] について述べておく. 決まったヘリシティの光子を放出する振幅を計算するには, この表現と対応する光子の偏極ベクトル $e_\mu(\mathbf{q},\pm)$ との

縮約をとらなければならない．しかし，5.9 節で見たように，$e^\mu(\mathbf{q},\pm)$ は 4 元ベクトルではない．ローレンツ変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ のもとで，偏極ベクトルは $\Lambda^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{q},\pm)$ と q^μ に比例する項との和に変換する．したがって，この 2 番目の項がローレンツ不変性を破らないためには，$M^\mu_{\beta\alpha}(q)$ は q_μ と縮約したときにゼロにならなければならない．しかし，$q\to 0$ で (13.1.3) より，

$$q_\mu M^\mu_{\beta\alpha}(q) \to M_{\beta\alpha}\sum_n \eta_n e_n \tag{13.1.4}$$

が得られる．右辺の $M_{\beta\alpha}$ の係数はちょうど終状態の全電荷と始状態の全電荷の差なので，それがゼロになるという条件は電荷が保存する条件だ．このようにゲージ不変性についての独立な仮定なしに，スピン 1 の質量ゼロ粒子については，ローレンツ不変性は，これらの粒子の低エネルギーでの相互作用を決めている電荷のような結合定数が全て保存することを要求する．

付け加えておくと，過程 $\alpha\to\beta$ で 4 元運動量 q とテンソルの添字 μ,ν を持つ**軟重力子**を放出する振幅は (13.1.3) に類似の以下の式，[3]

$$M^{\mu\nu}_{\beta\alpha}(q) \to M_{\beta\alpha}\sum_n \frac{\eta_n f_n\, p_n^\mu\, p_n^\nu}{p_n\cdot q - i\eta_n\epsilon} \tag{13.1.5}$$

で与えられる．ここで f_n は軟重力子と種類 n の粒子との結合定数だ．ローレンツ不変性は今度は，これが q_μ と縮約するとゼロになることを要求する．しかし，

$$q_\mu M^{\mu\nu}_{\beta\alpha}(q) \to M_{\beta\alpha}\sum_n \eta_n f_n\, p_n^\nu \tag{13.1.6}$$

なので，和 $\sum f_n p_n^\nu$ が保存する．しかし，自明でない散乱過程をすべて禁止することなしに保存できる 4 元運動量の線形結合で唯一のものは全 4 元運動量だから，(13.1.6) がゼロになるには f_n はすべて等しくなければならない．(すべての f_n の共通の値は，G_N を重力のニュートン定数として，$\sqrt{8\pi G_N}$ にとることができる.) このように，ローレ

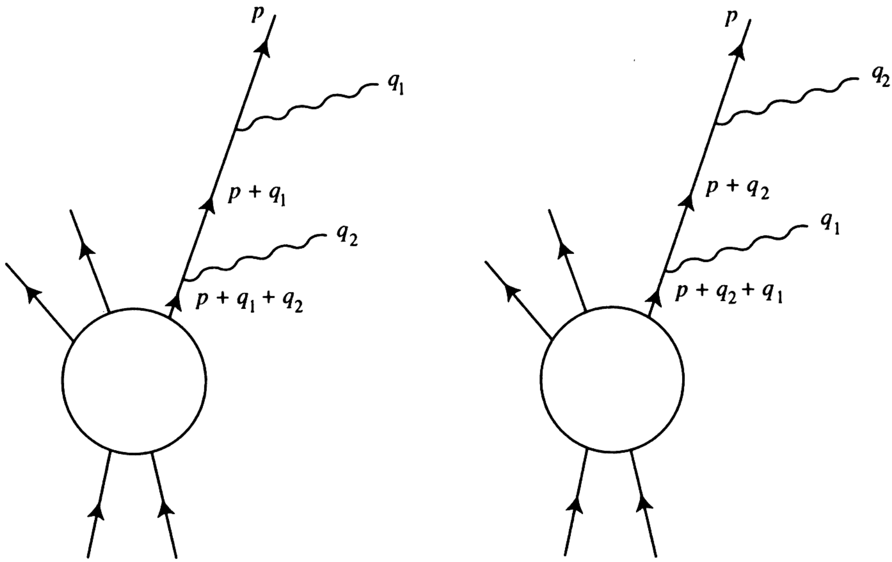


図 13.2: 2 個の軟光子が, 出て行く同一の荷電粒子から放出されるダイアグラム. 直線は大きな運動量を持つ粒子, 波線は軟光子.

ンツ不変性は, スピン 2 の低エネルギーの質量ゼロ粒子はすべての形のエネルギーと運動量に同じように結合するという結果を要求する. これは, アインシュタインの等価原理は, ローレンツ不変性をスピン 2 の質量ゼロ粒子に適用したときに必然的に得られる帰結だということを示すのに大いに役立つ. 同様に, 過程 $\alpha \to \beta$ で 4 元運動量 q とスピン $j \geq 3$ とを持つ低エネルギーの質量ゼロ粒子を放出する振幅は,

$$M_{\beta\alpha}^{\mu\nu\rho\cdots}(q) \to M_{\beta\alpha} \sum_n \frac{\eta_n g_n \, p_n^\mu \, p_n^\nu \, p_n^\rho \cdots}{p_n \cdot q - i\eta_n \epsilon}$$

の形をしている. 今度はローレンツ不変性は, 和 $\sum g_n p_n^\nu p_n^\rho \cdots$ が保存することを要求する. しかし, すべての自明でない散乱過程を禁止することなしにそのような量を保存させることはできないので, g_n はす

べてゼロでなければならない．スピン $j \geq 3$ の質量ゼロ粒子は存在するかもしれないが，しかし，それは低エネルギー極限で生き残る結合を持つことはできない．特に逆 2 乗則にしたがう力を媒介することはできない．

次に 2 個の軟光子の放出について考察しよう．過程 $\alpha \to \beta$ の異なる外線から 2 個の光子が放出されるダイアグラムからの行列要素への寄与は，$\alpha \to \beta$ の行列要素に (13.1.1) や (13.1.2) のような因子の積をかけることで得られる．多分読者は驚くと思うが，同じことは 2 個の光子が同じ外線から放出された場合でも成り立つ．例えば，電荷 $+e$ とエネルギー・運動量 4 元ベクトル p の外線から光子 1 が光子 2 の後に放出されるなら因子，

$$\left[\frac{\eta e p^{\mu_1}}{p\cdot q_1 - i\eta\epsilon}\right]\left[\frac{\eta e p^{\mu_2}}{p\cdot (q_2+q_1) - i\eta\epsilon}\right]$$

が得られ，光子 2 が光子 1 の後に放出されるなら因子は，

$$\left[\frac{\eta e p^{\mu_2}}{p\cdot q_2 - i\eta\epsilon}\right]\left[\frac{\eta e p^{\mu_1}}{p\cdot (q_1+q_2) - i\eta\epsilon}\right]$$

となる．(図 13.2 を見よ．ここでも η は荷電粒子の線が出て行くか入って来るかに応じて $+1$ か -1 だ．) これら二つの因子を加えると，

$$\left[\frac{\eta e p^{\mu_1}}{p\cdot q_1 - i\eta\epsilon}\right]\left[\frac{\eta e p^{\mu_2}}{p\cdot q_2 - i\eta\epsilon}\right]$$

となり，これはちょうど 1 光子の放出に現れたのと同じ因子の積だ．

もっと一般的に，任意個の光子が 1 本の外線から放出されるとき，以下の形の和が現れる．*

$$[p\cdot q_1 - i\eta\epsilon]^{-1}[p\cdot (q_1+q_2) - i\eta\epsilon]^{-1}[p\cdot (q_1+q_2+q_3) - i\eta\epsilon]^{-1}\cdots$$

---

*この恒等式は数学的帰納法で証明できる．すでに見たようにこれは 2 個の光子については正しい．これが $N-1$ 個の光子について正しいとする．すると N 個の光子の場合，置換についての和は，最初に放出される光子をどれにするかについての和と残りの光子の置換についての和とで次のように書ける．

$$[p\cdot q_1 - i\eta\epsilon]^{-1}[p\cdot (q_1+q_2) - i\eta\epsilon]^{-1}\cdots[p\cdot (q_1+q_2+\cdots+q_N) - i\eta\epsilon]^{-1} + [\text{置換}]$$

$$+[\text{置換}]$$
$$= [p\cdot q_1 - i\eta\epsilon]^{-1}[p\cdot q_2 - i\eta\epsilon]^{-1}[p\cdot q_3 - i\eta\epsilon]^{-1}\cdots \quad . \tag{13.1.7}$$

すると, 過程 $\alpha \to \beta$ で偏極の添字 $\mu_1, \cdots \mu_N$ と 4 元運動量 $q_1, \cdots q_N$ を持つ N 個の非常に低エネルギーの光子を放出する振幅 $M_{\beta\alpha}^{\mu_1\cdots\mu_N}(q_1\cdots q_N)$ は, $q \to 0$ の極限で $\alpha \to \beta$ の行列要素 $M_{\beta\alpha}$ に (13.1.3) のような因子を各光子につき 1 個ずつかけて得られることが分かる.

$$M_{\beta\alpha}^{\mu_1\cdots\mu_N}(q_1\cdots q_N) \to M_{\beta\alpha}\prod_{r=1}^{N}\left(\sum_n \frac{\eta_n e_n p_n^{\mu_r}}{p_n\cdot q_r - i\eta_n\epsilon}\right) \quad . \tag{13.1.8}$$

13.2 仮想軟光子

前節の結果を用いて, 今度は図 13.3 のように, 過程 $\alpha \to \beta$ の荷電粒子の線の間で交換される仮想軟光子を含む輻射補正の全次数の効果を計算する. 「軟」光子とは Λ 以下の運動量を持つ光子のことだ. ここで, Λ は前節で行った近似を正当化するのに十分なだけ小さく選ばれたある便宜上の分割点だ. この軟光子は赤外発散を引き起こすので, 当座の処法としてさらに光子の運動量に下限 λ を導入しなければならない. 軟光子の運動量のこれら二つの限界の違いを理解しておくことは重要だ. 上限 Λ は単に「軟」光子を定義する役割をしているだけで, 軟光子による輻射補正の Λ 依存性は, Λ より大きな運動量を持

$$= \sum_{r=1}^{N}\left[p\cdot\left(\sum_{s=1}^{N} q_s\right) - i\eta\epsilon\right]^{-1}\prod_{s\neq r}[p\cdot q_s - i\eta\epsilon]^{-1}$$
$$= \sum_{r=1}^{N}\left[p\cdot\left(\sum_{s=1}^{N} q_s\right) - i\eta\epsilon\right]^{-1}[p\cdot q_r - i\eta\epsilon]\prod_{s=1}^{N}[p\cdot q_s - i\eta\epsilon]^{-1}$$
$$= \prod_{s=1}^{N}[p\cdot q_s - i\eta\epsilon]^{-1}.$$

これは証明したかったことだ.

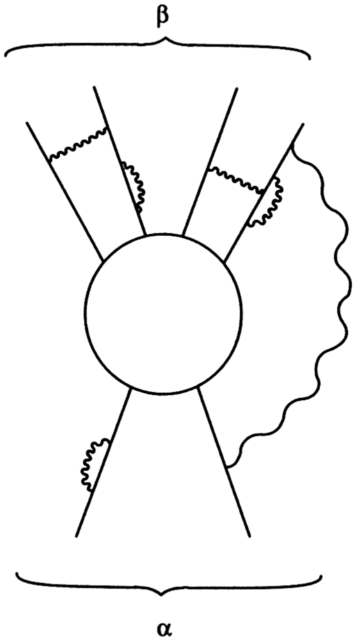


図 13.3: 仮想軟光子による過程 $\alpha \to \beta$ への輻射補正の典型的な主要なダイアグラム. 直線は状態 α と β の粒子 (大きな運動量の光子があればそれを含めて) で, 波線は軟光子だ.

つ仮想光子のみを含めて計算した振幅の残りの部分の Λ 依存性により相殺される. 一方, 下限 λ は $\lambda \to 0$ の極限をとって最終的に取り除かれなければならない. 後で見るように, この極限での赤外発散は実の軟光子を放出する効果と相殺する.

各々の仮想軟光子についてプロパゲーター因子,

$$\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{\eta_{\mu\mu'}}{q^2 - i\epsilon} \tag{13.2.1}$$

を用意して, 振幅 (13.1.8) にこれらのプロパゲーターの積をかけ, 光子

の偏極の添字の縮約をとり, 光子の運動量について積分する. さらに, N個の仮想光子の場合には因子 $2^N N!$で割らなければならない. なぜなら, 軟光子の二つの端を付けることができる全ての場所についての和には, 光子の線の $N!$ 個の置換についての和とこれらの線の両端の入れ替えについての和との 2 種類の見かけ上の和が含まれるからだ. N 個の軟光子を含む輻射補正の効果は, そのような輻射補正のない過程の行列要素 $M_{\beta\alpha}$ に因子,

$$\frac{1}{N!2^N}\left[\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{nm} e_n e_m \eta_n \eta_m J_{nm}\right]^N \tag{13.2.2}$$

をかけることだ. ここで, 以下の定義を使った.

$$J_{nm} \equiv -i(p_n \cdot p_m)\int_{\lambda\le|\mathbf{q}|\le\Lambda} \frac{d^4q}{[q^2 - i\epsilon][p_n \cdot q - i\eta_n\epsilon][-p_m \cdot q - i\eta_m\epsilon]}\ . \tag{13.2.3}$$

(13.2.3) の分母の $p_m \cdot q$ の符号を変えているが, これは q を線 n が放出する運動量と定義すると線 m が放出する運動量は $-q$ だからだ.

N についての和をとると, 運動量 $|\mathbf{q}| \ge \lambda$ の任意個の軟光子による輻射補正を含む過程の行列要素は,

$$M^\lambda_{\beta\alpha} = M^\Lambda_{\beta\alpha}\exp\left[\frac{1}{2(2\pi)^4}\sum_{nm} e_n e_m \eta_n \eta_m J_{nm}\right] \tag{13.2.4}$$

となる. ここで $M^\Lambda_{\beta\alpha}$ は Λ 以上の運動量を持つ仮想光子のみを含む振幅だ.

(13.2.3) の q^0 積分は留数の方法で実行できる. 被積分関数は q^0 について,

$$q^0 = |\mathbf{q}| - i\epsilon, \qquad q^0 = -|\mathbf{q}| + i\epsilon\ ,$$
$$q^0 = \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{q} - i\eta_n\epsilon, \qquad q^0 = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{q} + i\eta_m\epsilon$$

の四つの極を除いて解析的だ. ここで, $\mathbf{v}_n \equiv \mathbf{p}_n/p^0_n$ で, $\mathbf{v}_m$ についても同様だ. もし粒子 n が出て行き, 粒子 m が入って来るなら $\eta_n =$

$+1$, $\eta_m = -1$ なので, q^0 の積分路を上半面で閉じて $q^0 = \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{q} - i\eta_n\epsilon$ と $q^0 = \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{q} + i\eta_m\epsilon$ の極からの寄与を避ける. 同様に, n が入って来て m が出て行くなら, 積分路を下半面で閉じてこれら二つの極を避けることができる. これら二つの場合には $q^0 = \pm(|\mathbf{q}| - i\epsilon)$ の極のうち寄与するのは一方だけで, 以下の実数積分が得られる.

$$J_{nm} = -\pi(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \leq |\mathbf{q}| \leq \Lambda} \frac{d^3q}{|\mathbf{q}|^3(E_n - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_n)(E_m - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_m)}$$

$$(\eta_n = -\eta_m = \pm 1 \text{ の場合}) \ . \tag{13.2.5}$$

他方, 粒子 n と m が両方とも出て行くかあるいは両方とも入って来る場合には, $\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{q} - i\eta_n\epsilon$ と $\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{q} + i\eta_m\epsilon$ の極は q^0 の実軸の反対側にあり, 積分路をどのように閉じさせてもそれらの一方からの寄与を避けることはできない.

$$J_{nm} = -\pi(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \leq |\mathbf{q}| \leq \Lambda} \frac{d^3q}{|\mathbf{q}|^3(E_n - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_n)(E_m - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_m)} - \frac{4i\pi^3}{\beta_{nm}} \ln\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right) \qquad (\eta_n = \eta_m = \pm 1 \text{ の場合}) \ . \tag{13.2.6}$$

ここで, β_{nm} は粒子 n と m の一方の静止系での相対速度だ.

$$\beta_{nm} \equiv \sqrt{1 - \frac{m_n^2 m_m^2}{(p_n \cdot p_m)^2}} \ . \tag{13.2.7}$$

(13.2.6) の虚数項は (13.2.4) に赤外発散する位相因子[4]を生じさせるが, 過程 $\alpha \to \beta$ の反応率を計算するために行列要素の絶対値をとると, それは消える. (非相対論的なクーロン散乱ではシュレーディンガー波動関数の出て行く波の部分は, ν を電荷の積を相対速度で割ったものとして, 動径座標 r について $\exp(ipr)/r$ でなく $\exp(ipr - i\nu \ln r)/r$ の形の依存性を持つことはよく知られているが, 上記の無限大の位相因子は相対論でこれに対応するものだ.[5]) 反応率は J_{nm} の実部の影響

を受ける. それは全ての η_n と η_m について次の値をとる.

$$\mathrm{Re}\, J_{mn} = -\pi(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \le |\mathbf{q}| \le \Lambda} \frac{d^3 q}{|\mathbf{q}|^3 (E_n - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_n)(E_m - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_m)} . \tag{13.2.8}$$

簡単な計算の結果, 以下を得る.

$$\mathrm{Re}\, J_{mn} = \frac{2\pi^2}{\beta_{nm}} \ln\left(\frac{1+\beta_{nm}}{1-\beta_{nm}}\right) \ln\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right) . \tag{13.2.9}$$

これを (13.2.4) の絶対値の 2 乗に使って, この過程の反応率 $\Gamma_{\beta\alpha}$ への軟光子の効果が以下のように得られる.

$$\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} = \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^{A(\alpha\to\beta)} \Gamma^{\Lambda}_{\beta\alpha} . \tag{13.2.10}$$

ここで $\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}$ と $\Gamma^{\Lambda}_{\beta\alpha}$ はそれぞれ, 過程 $\alpha \to \beta$ で λ または Λ より大きな運動量のみを持つ軟光子の輻射補正を含む反応率だ. また, A は,

$$A(\alpha \to \beta) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{nm} \frac{e_n e_m \eta_n \eta_m}{\beta_{nm}} \ln\left(\frac{1+\beta_{nm}}{1-\beta_{nm}}\right) \tag{13.2.11}$$

で与えられる指数だ. これは, 補正因子 $(\lambda/\Lambda)^A$ が λ のある関数と Λ の同じ関数との比になっているがために意味を成す. なぜなら (13.2.10) の二つの反応率はそれぞれ λ と Λ にのみ依存できるからだ.

指数 A は常に正だ. 例えば, 1 個の荷電粒子が中性粒子または外場によるポテンシャルで散乱される場合, (13.2.11) で n と m が両方とも始状態の荷電粒子かあるいは両方とも終状態の荷電粒子の場合 (この場合 $\eta_n\eta_m = +1$ で $\beta_{nm} = 0$) の項と, n が始状態か終状態の荷電粒子で m がその逆の場合 (この場合 $\eta_n\eta_m = -1$ と $\beta_{nm} = \beta$ で $1 > \beta > 0$) の項とを加えなければならない. これは,

$$A = -\frac{e^2}{8\pi^2}\left[4 - \frac{2}{\beta}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\right]$$

を与えるが, それは全ての $1 > \beta > 0$ について正だ. A が正なので, 仮想軟光子による赤外発散の効果は, 全次数について足し上げると, 任

意の荷電粒子を含む過程 $\alpha \to \beta$ の反応率を $\lambda \to 0$ の極限でゼロにする.

* * *

実の軟光子の放出によるこれらの赤外発散の相殺の考察に進む前に, 上記の計算で筆者の知る限り従来の文献では常に無視されてきた事項を少し説明する. これらの輻射補正を計算する際に, 仮想光子を放出する荷電粒子の外線と吸収する外線が異なるダイアグラムばかりでなく, それが同一の外線で放出・吸収されるダイアグラムも含めた. しかし 10 章で学んだように, S 行列を計算する際に外線に自己エネルギーの部分ダイアグラムを挿入する輻射補正を含めてはいけないはずだ. これより (13.2.11) で $n = m$ の項を落とすべきかもしれない. しかしそうすると, 次の節で見る赤外発散の相殺は完全でなくなる.

この問題の解答を得るには, 仮想軟光子は直接に赤外発散を引き起こすだけでなく荷電粒子の場のくりこみ定数 Z_n への効果を通じても赤外発散を引き起こすことを見ればよい. (くりこみ定数 Z_n はスピン $\frac{1}{2}$ の荷電粒子の場を 1 個だけ含む理論では通常 Z_2 と呼ばれているものだ.) 外線の輻射補正の効果を相殺するのは $Z_n - 1$ に比例する相殺項だ. 具体的には, 種類 n の荷電粒子のくりこまれた場はくりこまれていない場に因子 $Z_n^{-1/2}$ をかけたものであり, よってくりこまれた場を用いて S 行列を計算する (これは外線の輻射補正を省略することに対応する) ときには余分な因子 $\prod_n Z_n^{-1/2}$ を導入する. ここで, 積は始状態と終状態の全荷電粒子についてとる. (もちろん中性粒子についても因子 $Z_n^{-1/2}$ があるが, これは赤外発散しない.) 少しだけ異なる記法を使えば, この因子は,

$$\prod_f Z_f^{-E_f/2}$$

と書ける. ここで Z_f は種類 f の場のくりこみ定数, E_f は種類 f の外

線の数で, 積は今度は全ての荷電粒子の場の種類についてとる. しかし, これらの場のくりこみ定数はダイアグラムの内部にも現れる. 種類 f の荷電粒子の場を N_{if} 個含む i 種の相互作用をくりこまれた場で表わすと, 赤外発散する因子,

$$\prod_f (Z_f)^{N_{if}/2}$$

が出てくる. (例えば (11.1.9) の相殺項 $-ie(Z_2-1)A_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ は通常の電磁相互作用 $-ieA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ といっしょにすると相互作用 $-iZ_2eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ を生じる. (11.3.23) の括弧内の第 2 項や (11.4.14) の最後の項から生じる赤外発散の原因となっているのはこの Z_2 因子の赤外発散だった.) また, くりこまれた場のプロパゲーターの赤外発散もある. すなわち, 種類 f のくりこまれた荷電粒子の場のプロパゲーターをくりこまれていない場のプロパゲーターで表わすと因子 Z_f^{-1} が生じる. これらを全て考慮すると, 相互作用の相殺項および外線だけでなく内線の輻射補正の相殺項により導入される荷電粒子の各種類 f 毎の因子 Z_f の総数は,

$$\tfrac{1}{2}\sum_i V_i N_{if} - I_f - \tfrac{1}{2}E_f$$

で与えられる. ここで, I_f と E_f は種類 f の内線と外線の数で, V_i は i 種の相互作用の頂点の数だ. 6.3 節ですでに述べたように, この量は各 f についてゼロになる. このように外線の輻射補正を相殺する相殺項はそれ自身内線と頂点から来る Z_f 因子により相殺される. よって (13.2.11) は $n=m$ の項を含めてそのままで正しい.

13.3 実軟光子と発散の相殺

前節で現れた赤外発散の問題を解決するには, 決まった数の光子と荷電粒子を含む反応 $\alpha\to\beta$ の反応率 $\Gamma_{\beta\alpha}$ を測定することは実際には

不可能だということに気付けばよい. これは, 非常に低エネルギーの光子は常に測定を免れうるからだ. 測定できるのは, ある小さい値 E より大きなエネルギーを持つ光子は全て観測され, かつ任意の個数の観測されない光子が持つエネルギーの総量がある小さな値 E_T を超えない反応が起こる率 $\Gamma_{\beta\alpha}(E, E_T)$ だ. (もちろん $E \le E_T$ だ. 軟光子測定器を使わない実験では, α と β の「高エネルギー」粒子のエネルギー測定を通じて軟光子に流れ込む全エネルギーに上限 E_T を課すことができ, この場合はちょうど $E = E_T$ と置く.) ではこの反応率の計算に移ろう.

過程 $\alpha \to \beta$ で N 個の実の軟光子を放出する S 行列は振幅 (13.1.8) の N 個の光子偏極の添字 $\mu_1, \mu_2, \cdots$ をそれぞれ適切な係数関数,

$$\frac{\epsilon^*_\mu(\mathbf{q}, h)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2|\mathbf{q}|}}$$

と縮約して得られる. ここで $\mathbf{q}$ は光子の運動量, $h = \pm 1$ はヘリシティ, ϵ^μ は対応する光子の偏極「ベクトル」だ.* これより 1 光子放出の行列要素 (S 行列要素からデルタ関数を除いたもの) が次のように得られる.

$$M^\lambda_{\beta\alpha}(\mathbf{q}_1, h_1, \mathbf{q}_2, h_2, \cdots) = M^\lambda_{\beta\alpha}$$
$$\times \prod_{r=1}^{N} (2\pi)^{-3/2}(2|\mathbf{q}|)^{-1/2} \sum_n \frac{\eta_n e_n [p_n \cdot \epsilon^*(\mathbf{q}_r, h_r)]}{p_n \cdot q_r} . \quad (13.3.1)$$

(添字 λ は, これらの振幅が仮想光子の運動量の赤外切断 λ を導入して計算されたことを明示するためだ. 最終的には $\lambda \to 0$ の極限をとる. 仮想軟光子の存在により (13.3.1) の結果が影響を受けることはない. これは 13.1 節で述べた因数分解のおかげだ.) N 個の軟光子が運動量空間の体積 $\prod_r d^3q_r$ に放出される微分反応率は, この行列要素を

*光子の偏極ベクトルとして e^μ の代わりに ϵ^μ を使っている. これはここで電荷に使っている e_n と混同することを避けるためだ.

2 乗してヘリシティについて和をとって $\prod_r d^3 q_r$ をかければ得られる. (8.5.7) より, $q^2 = 0$ の場合のヘリシティの和は,

$$\sum_{h=\pm 1} \epsilon^\mu(\mathbf{q}, h)\epsilon^{\nu *}(\mathbf{q}, h) = \eta_{\mu\nu} + q_\mu c_\nu + q_\nu c_\mu \tag{13.3.2}$$

の形をとる. ここで, $\mathbf{c} \equiv -\mathbf{q}/2|\mathbf{q}|^2$ および $c^0 \equiv 1/2|\mathbf{q}|$ だ. 電荷の保存条件 $\sum_n \eta_n e_n = 0$ より (13.3.2) で q_μ か q_ν を含む項は落とすことができ, 微分反応率は次のようになる.**

$$d\,\Gamma^\lambda_{\beta\alpha}(\mathbf{q}_1, \cdots \mathbf{q}_N) = \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} \prod_{r=1}^{N} \frac{d^3 q_r}{(2\pi)^3(2|\mathbf{q}|)} \sum_{nm} \frac{\eta_n \eta_m e_n e_m (p_n \cdot p_m)}{(p_n \cdot q_r)(p_m \cdot q_r)} \,. \tag{13.3.3}$$

一定のエネルギー $\omega_r \equiv |\mathbf{q}_r|$ をもつ N 個の軟光子を放出する微分反応率を計算するには, (13.3.3) を光子の運動量 $\mathbf{q}_r$ の方向について積分しなければならない. これらの積分は (13.2.8) の積分に現れたものと同じだ.

$$-\pi(p_n \cdot p_m) \int \frac{d^2 \hat{\mathbf{q}}}{(E_n - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_n)(E_m - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_m)} = \frac{2\pi^2}{\beta_{nm}} \ln\left(\frac{1+\beta_{nm}}{1-\beta_{nm}}\right) \,. \tag{13.3.4}$$

このようにして (13.3.3) を光子の運動量について積分するとエネルギー $\omega_1, \cdots \omega_N$ の光子の微分反応率は次のように与えられる.

$$d\Gamma^\lambda_{\beta\alpha}(\omega_1 \cdots \omega_N) = \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} A(\alpha \to \beta)^N \frac{d\omega_1}{\omega_1} \cdots \frac{d\omega_N}{\omega_N} \,. \tag{13.3.5}$$

ここで $A(\alpha \to \beta)$ は前節で現れた定数と同じものだ.

$$A(\alpha \to \beta) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{nm} \frac{e_n e_m \eta_n \eta_m}{\beta_{nm}} \ln\left(\frac{1+\beta_{nm}}{1-\beta_{nm}}\right) \,.$$

** $N = 1$ の場合の $|\mathbf{q}| d\Gamma_{\beta\alpha}(\mathbf{q})/\Gamma_{\beta\alpha}$ の結果は, 非連続的に変化する電流 4 元ベクトル $J^\mu(x) = \sum_n^{(t)} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{v}_n t) p_n^\mu e_n / E_n$ により古典的に放出されるエネルギー分布に対応する. ここで, 和は $t < 0$ のとき始状態の粒子についてとり, $t > 0$ のとき終状態の粒子についてとる.

(13.3.5) より分かるように, 放出される光子のエネルギーについて制限せずに積分すると新たな赤外発散が生じる. しかし, もし (添字 λ で表わされているように) 仮想光子の運動量に赤外切断を使うなら, ユニタリー性の要求から, 実光子についても同じ赤外切断を使わなければならない. 反応 $\alpha \to \beta$ で, どの観測されない光子に流れ込むエネルギーも E を超えず, 観測されない光子に流れ込むエネルギーの総量は E_T を超えない反応率 $\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}(E, E_T)$ を計算するには, (E と E_T は十分に小さくて (13.3.1) を導く際に使った近似が正当化できるとして) (13.3.5) を全光子エネルギーについて $E \geq \omega_r \geq \lambda$ と $\sum_r \omega_r \leq E_T$ の制限のもとで積分し, この積分は N 個の軟光子の置換だけしか異ならない配位を含むので $N!$ で割り, 最後に N について和をとらなければならない. この結果は次のようになる.

$$\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}(E, E_T) = \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{A(\alpha \to \beta)^N}{N!} \int_{E \geq \omega_r \geq \lambda, \sum_r \omega_r \leq E_T} \prod_{r=1}^{N} \frac{d\omega_r}{\omega_r} \,. \tag{13.3.6}$$

この積分は, $\sum_r \omega_r \leq E$ の制限がなければ個々の ω_r についての N 個の積分の積に分解する. この制限は被積分関数の因子として階段関数,

$$\theta(E_T - \sum_r \omega_r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \, \frac{\sin E_T u}{u} \exp\left(iu \sum_r \omega_r \right) \tag{13.3.7}$$

を付け加えれば取り入れることができる. すると (13.3.6) は以下のようになる.

$$\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}(E, E_T) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \, \frac{\sin E_T u}{u} \exp\left(A(\alpha \to \beta) \int_{\lambda}^{E} \frac{d\omega}{\omega} \, e^{i\omega u} \right) \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} \,. \tag{13.3.8}$$

指数の積分は, $(e^{i\omega u} - 1)/\omega$ の積分と $1/\omega$ の積分の和で書けば, $\lambda \ll E$ の極限で実行できる. 前者は $\lambda = 0$ の極限がとれ, 後者は容易だ. 変

数 u と ω のスケール変換をすると $\lambda \ll E$ で,

$$\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}(E, E_T) \to \mathcal{F}\Big(E/E_T; A(\alpha\to\beta)\Big)\left(\frac{E}{\lambda}\right)^{A(\alpha\to\beta)}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} \qquad (13.3.9)$$

が得られる. ここで以下の表式を使った.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x; A) &\equiv \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du\,\frac{\sin u}{u}\exp\left(A\int_0^x \frac{d\omega}{\omega}\left(e^{i\omega u}-1\right)\right) \\ &= 1 - \frac{A^2\theta(x-\frac{1}{2})}{2}\int_{1-x}^{x}\frac{d\omega}{\omega}\ln\left(\frac{x}{1-\omega}\right) + \cdots . \qquad (13.3.10)\end{aligned}$$

E と E_T が同じ程度の大きさで $A \ll 1$ ならば, (13.3.9) の因子 $\mathcal{F}$ $(E/E_T, A)$ は 1 に近く, 例えば次のようになる.

$$\mathcal{F}(1; A) \simeq 1 - \frac{1}{12}\pi^2 A^2 + \cdots .$$

$A(\alpha\to\beta) > 0$ なので, (13.3.9) の因子 $(E/\lambda)^{A(\alpha\to\beta)}$ は $\lambda \to 0$ の極限で無限大になる. しかし, (13.2.10) より分かるように, 反応率 $\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}$ はこの極限でゼロになる.

$$\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} = \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^{A(\alpha\to\beta)}\Gamma^{\Lambda}_{\beta\alpha} .$$

これを (13.3.9) で使うと, 赤外切断 λ は $\lambda \ll E$ の極限で消えて, 以下のようになる.

$$\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}(E, E_T) \to \mathcal{F}\Big(E/E_T; A(\alpha\to\beta)\Big)\left(\frac{E}{\Lambda}\right)^{A(\alpha\to\beta)}\Gamma^{\Lambda}_{\beta\alpha} . \qquad (13.3.11)$$

エネルギー Λ は, (13.3.11) で陽に考慮されている「軟」光子と, その効果は $\Gamma^{\Lambda}_{\beta\alpha}$ に埋め込まれている「硬い」光子とを分ける便宜上の点にすぎないことに読者は留意して欲しい. (13.3.11) の右辺は Λ に依存しない. なぜなら, $\Gamma^{\Lambda}_{\beta\alpha} \propto \Lambda^{A}$ だからだ. しかし, 量子電磁理論のように小さな結合定数を持つ理論では, Λ を衝突に含まれる典型的なエネルギー W と比べて十分小さくとってここで採用した近似が Λ 以下の光子エ

ネルギーについて成り立つようにし, 同時に $A(\alpha \to \beta)\ln(W/\Lambda) \ll 1$ が成り立つように十分大きくとるのがしばしば良い方法となる. その場合には $\Gamma^{\Lambda}_{\beta\alpha}$ を最低次の摂動論で計算することがよい近似となり, $E \ll \Lambda$ の場合の主要な輻射補正は (13.3.11) の $(E/\Lambda)^A$ の因子で与えられる.

* * *

赤外発散の同じ相殺が軟重力子でも起こる.[3] 任意の過程 $\alpha \to \beta$ で軟重力子に流れ込むエネルギーが E を超えない反応率は E^B に比例する. ここで, B は以下のとおりだ.

$$B = \frac{G}{2\pi} \sum_{nm} \eta_n \eta_m m_n m_m \frac{1+\beta_{nm}^2}{\beta_{nm}\sqrt{1-\beta_{nm}^2}} \ln\left(\frac{1+\beta_{nm}}{1-\beta_{nm}}\right) . \qquad (13.3.12)$$

13.4 一般の赤外発散

この章で今まで考察してきた軟光子による赤外発散は様々な物理理論に現れる種々の赤外発散の一例に過ぎない. 別の例は質量ゼロの荷電粒子を含む量子電磁理論だ. その場合には軟光子により赤外発散が相殺した後にも, (13.3.11) の指数 A に対数発散が現れる. (13.2.11) と (13.2.7) によれば, 全ての荷電粒子が電子である過程では, $m_e \to 0$ の極限でこの指数は,

$$\begin{aligned} A &\to -\frac{1}{4\pi^2}\sum_n e_n^2 - \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\neq m} e_n e_m \eta_n \eta_m \ln\left(\frac{2|p_n \cdot p_m|}{m_e^2}\right) \\ &\to -\frac{\ln m_e}{2\pi^2}\sum_n e_n^2 \end{aligned}$$

となる. (最後の段階で電荷の保存条件 $\sum_n e_n \eta_n = 0$ を使った.) この式の赤外発散は始状態または終状態のなかの 1 個の「硬い」電子の運動量に平行に放射された軟光子から生じる. しかし, 光子が電子と同様に低エネルギーでなくても, $\mathbf{p}_n$ が $\mathbf{q}$ に平行なら $p_n^2 = q^2 = 0$ の

ときプロパゲーターの分母の $(p_n \pm q)^2$ がゼロになるので，赤外発散は起こる．もう少し詳しく述べると，$p_n^2 = q^2 = 0$ のとき，この因子*の光子の方向に関する積分は，

$$\int d^2\hat{q}\,(p \pm q)^{-2} = \frac{2\pi}{\mathbf{p}^2\mathbf{q}^2}\int_0^\pi \frac{\sin\theta\,d\theta}{1-\cos\theta}$$

の形をとる．ここで，θ は光子の運動量と荷電粒子の運動量との角度である．この積分は $\theta = 0$ で対数発散する．

もちろん，現実の世界では質量ゼロの荷電粒子は存在しないが，スカラー積 $|p_n \cdot p_m|$ の典型的な値 E^2 が m_e^2 よりずっと大きい反応で，大きな $\ln(m_e/E)$ の因子がどこに現れるかを考察するのは興味深い．この場合の主要な輻射補正はしばしば A の $-\ln(m_e/E)\sum_n e_n^2/2\pi^2$ の項で与えられる．より重要なこととして，量子色力学では，電荷に類似の色 (color) として知られる保存する量子数を持つ質量ゼロ粒子，すなわちグルーオンが存在し，始状態または終状態の高エネルギーのグルーオンあるいは色を持つ他の高エネルギー粒子から，平行な高エネルギー・グルーオンを放出することにより赤外発散が生じる．

これらの赤外発散は適切な終状態について足し上げても一般には取り除けない．しかし，リー (Lee) とナウエンベルグ (Nauenberg)[6]が指摘したように，適切な終状態について足し上げるばかりでなく，始状態のある確率分布を仮定すれば，赤外発散は相殺させることができる．以下は，彼らの議論の修正版になっており，これにより，質量がゼロでない電子を含む電磁理論の場合になぜ終状態についての足し上げだけで十分だったかがただちに明らかになる．

この目的には「旧式」の摂動論に戻るのが便利だ．そこでは，S 行列は (3.2.7) と (3.5.3) で，

$$S_{ba} = \delta(b-a) - 2i\pi\delta(E_a - E_b)T_{ba} \tag{13.4.1}$$

*この因子は 2 乗されない．なぜなら発散は S 行列のこの項と光子が $m \neq n$ の他の荷電粒子の線から放出される項との干渉でのみ起こるからだ．$m = n$ の場合は，積分 (13.2.8) は m_n^2 に比例する．

と与えられる. ここで, T_{ba} は次のとおりだ.

$$T_{ba} = V_{ba} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int dc_1 \cdots dc_\nu \, \frac{V_{bc_1} V_{c_1 c_2} \cdots V_{c_\nu a}}{(E_a - E_{c_1} + i\epsilon) \cdots (E_a - E_{c_\nu} + i\epsilon)}. \tag{13.4.2}$$

($c_1 \cdots c_\nu$ の積分はこれらの状態の粒子の 3 元運動量についての積分だけでなくそのスピンと種類についての和も含むと理解する.) 赤外発散はこの表現のエネルギー分母の 1 個以上がゼロとなることから (そしてそのことからのみ) 生じる.

しかし, ゼロになるエネルギー分母が全て赤外発散を生じるわけではない. 一般の中間状態 c が $E_c = E_a$ を持つかもしれないが, 通常これは積分領域の内側の 1 点であり, この領域全体の積分は分母の $i\epsilon$ にもとづく処法により収束する. 中間状態 c が赤外発散を生じるためには, エネルギー $E_c = E_a$ が積分領域の端点で実現している必要がある. これは例えば (13.4.2) の最初の中間状態 c_1 が, 始状態 a の粒子のなかで任意の質量ゼロ粒子を, 全運動量がそれに等しいほとんど平行な任意個の質量ゼロ粒子からなるジェット (jet) で置き換えた状態のときに起こる. この場合, $E_{c_1} = E_a$ となる端点は, 運動量空間の中で各ジェット内の全ての質量ゼロ粒子が平行になる点だ. もっと一般的には, a の任意個の質量ゼロ粒子を, ほとんど平行な質量ゼロ粒子のジェット群とそれ以外に任意個の低エネルギーの質量ゼロ粒子を合わせたもので置き換えた状態も含まれる. そのような状態全体の集合を $D(a)$ とする. (正確には,「ほとんど平行」と「低エネルギー」の意味を定義するために小さな角度 Θ と小さなエネルギー Λ を導入する必要がある. 集合 $D(a)$ の Θ および Λ 依存性をわざわざ明示することはしない.) $D(a)$ の状態は, エネルギー分母 $E_a - E_{c_1}$ が端点でゼロになることで赤外発散を引き起こすという意味で「危険」(dangerous) だ. ここで $E_{c_1} = E_a$ となる端点は, 各ジェット内の全ての質量ゼロ粒

子が平行で全ての低エネルギーの質量ゼロ粒子のエネルギーがゼロになる点だ.

さらに, もし $c_1, \cdots c_n$ がそれぞれ集合 $D(a)$ にあるなら, $D(a)$ 内にある中間状態 c_{n+1} もまた同じ意味で危険だ. 他方, ある中間状態 c_m が $D(a)$ 内にないならば, それ以降の $k > m$ の状態 c_k はたとえそれが $D(a)$ に属していても危険ではない. なぜなら, 状態 a の粒子の 3 元運動量に等しい運動量を持つ高エネルギー粒子またはジェットの配位は積分領域の内側の通常の点にすぎないからだ. まったく同様に, 状態の集合 $D(b)$ を次のように定義できる. すなわち, 状態 b のうち質量ゼロの 1 個以上の粒子をほとんど平行な質量ゼロ粒子のジェット群で置き換えて, さらに任意個の低エネルギーの質量ゼロ粒子を付け加える. ここで各ジェットは置きかえる前の元の粒子と全運動量が等しい. 中間状態 c_m は, それが集合 $D(b)$ に属しかつそれ以降の $k > m$ の状態 c_k が全て $D(b)$ に属するなら危険だ.

これらの危険な状態の効果を取り出すために, (13.4.2) を

$$T_{ba} = V_{ba} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(V \left[\frac{\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b + \mathcal{P}_{\not\in a,b}}{E_a - H_0 + i\epsilon} V \right]^{\nu} \right)_{ba} \tag{13.4.3}$$

の形に書き換える. ここで, $\mathcal{P}_a, \mathcal{P}_b, \mathcal{P}_{\not\in a,b}$ はそれぞれ $D(a), D(b)$ およびその他の全ての状態への射影演算子だ. (ここでは b のどの荷電粒子も a のどれかの荷電粒子運動量に近い運動量を持たず, よって集合 $D(a)$ と $D(b)$ とは重なりがないと仮定する.) さて, $\Lambda \to 0$ と $\Theta \to 0$ の極限で, 危険な中間状態は非常に小さい位相空間を占めるだけなので赤外発散を引き起こさない限り無視できる. よって冪級数 (13.4.3) は次のようになる.

$$T_{ba} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\left[V \frac{\mathcal{P}_b}{E_a - H_0 + i\epsilon} \right]^{r} V \left[\frac{\mathcal{P}_{\not\in a,b}}{E_a - H_0 + i\epsilon} V \right]^{\nu} \times \left[\frac{\mathcal{P}_a}{E_a - H_0 + i\epsilon} V \right]^{s} \right)_{ba} . \tag{13.4.4}$$

これは, もし左端と右端の間にある全ての射影演算子 $\mathcal{P}_{\not\in a,b}$ が $\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b + \mathcal{P}_{\not\in a,b}$ で置き換わり, 左側と右側の $\mathcal{P}_b$ と $\mathcal{P}_a$ が $\mathcal{P}_b + \mathcal{P}_a$ で置き換われば正確な式だが, 上で述べたようにこれは Λ と Θ が十分小さいとき最終結果への影響は無視できる.

(13.4.4) はもっと簡潔な形,

$$T_{ba} = \left(\Omega_b^{-\dagger}\, T_S\, \Omega_a^{+}\right)_{ba} \tag{13.4.5}$$

に書ける. ここで, 後で使うことを考慮して, 一般の状態 α と β について Ω_α^+ と Ω_β^- を,

$$(\Omega_\alpha^+)_{ca} \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \left(\left[\frac{\mathcal{P}_\alpha}{E_a - H_0 + i\epsilon} V \right]^r \right)_{ca} , \tag{13.4.6}$$

$$(\Omega_\beta^-)_{db} \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \left(\left[\frac{\mathcal{P}_\beta}{E_b - H_0 - i\epsilon} V \right]^r \right)_{db} \tag{13.4.7}$$

と定義し, また T_S は以下の「安全」(safe) な演算子だ.**

$$(T_S)_{dc} \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(V \left[\frac{\mathcal{P}_{\not\in c,d}}{E_c - H_0 + i\epsilon} V \right]^\nu \right)_{dc} . \tag{13.4.8}$$

全ての赤外発散はこれで二つの演算子の因子 Ω_b^- と Ω_a^+ に分離された.

これらの赤外発散を取り除くには, 演算子 Ω_b^- と Ω_a^+ はもし危険な状態にかかる射影演算子がなければ (3.1.16) に従って自由粒子状態をそれぞれ「out」状態と「in」状態とに変換するユニタリー演算子にすぎないということに気付きさえすればよい. よってこれらの演算子は与えられた終状態 β と与えられた始状態 α に関して危険な状態の部分空間 $D(\beta)$ と $D(\alpha)$ に閉じていればユニタリーだ. すなわち, 一般の α と β について,

$$\Omega_\beta^- \mathcal{P}_\beta \Omega_\beta^{-\dagger} = \mathcal{P}_\beta , \tag{13.4.9}$$

**$(\Omega_b^-)_{db}$ では T_{ba} が $E_b = E_a$ で計算されることを使っている. また $(T_S)_{dc}$ では E_c が E_a に非常に近くなければ射影演算子 $\mathcal{P}_a$ のために $(\Omega_a^+)_{ca}$ はゼロになることを使っている. また, (13.4.5) の因子 $\Omega_b^{-\dagger}$ と Ω_a^+ のために $\mathcal{P}_{\not\in c,d} = \mathcal{P}_{\not\in a,b}$ となる.

$$\Omega_\alpha^+ \mathcal{P}_\alpha \Omega_\alpha^{+\dagger} = \mathcal{P}_\alpha \tag{13.4.10}$$

が成り立つ. よって遷移率は, 任意の与えられた終状態 β および始状態 α に関して危険な状態の部分空間について足し上げれば赤外発散を含まない.

$$\sum_{a\in D(\alpha)} \sum_{b\in D(\beta)} |T_{ba}|^2 = \mathrm{Tr}\left\{\Omega_\beta^- \mathcal{P}_\beta \Omega_\beta^{-\dagger} T_S \Omega_\alpha^+ \mathcal{P}_\alpha \Omega_\alpha^{+\dagger} T_S^\dagger\right\}$$
$$= \mathrm{Tr}\left\{\mathcal{P}_\beta T_S \mathcal{P}_\alpha T_S^\dagger\right\} = \sum_{a\in D(\alpha)} \sum_{b\in D(\beta)} |(T_S)_{ba}|^2 \,. \tag{13.4.11}$$

これが赤外発散の一般的な問題を本当に解決することを確信するには, 実験的に測定可能なのは (13.4.11) のような和のみだということを議論しておく必要がある. 観測可能な遷移率を得るには危険な終状態について和をとらねばならないことは納得がいく. なぜなら 1 個の出て行く質量ゼロの荷電 (またはカラーを持った) 粒子を, それと等しい全エネルギーとほとんど平行な運動量とを持つ質量ゼロ粒子のジェット[7]に任意個の非常に低エネルギーの量子を付け加えて全電荷 (またはカラー) を同じにしたものと区別することは実験的には不可能だからだ. 始状態についての和はもっと難問だ. 多分, 本当に質量がゼロの粒子は常に, 運動量空間のある体積内で一様な低エネルギー量子の集合をともなうジェットとして生成されるという議論はできる. しかし, 筆者の知る限り, 赤外発散のない遷移率の和が実験的に測定可能な唯一のものだということを完全に示した人はいない.

この問題は (質量がゼロでない荷電粒子の) 量子電磁理論では起こらない. すでに見たようにその場合は赤外発散を取り除くためには終状態について足し上げるだけでよい. この違いの理由は, 量子電磁理論では状態 $a, b, c, \cdots$ は固定した数の荷電粒子と高エネルギー光子の (ギリシャ文字の添字で表わされている) 状態の直積に, ある小さな値 Λ 以下のエネルギーを持つ軟光子のみを含む状態をかけたものだと

いう事実に帰することができる. すると, 軟光子の集合 f が荷電粒子および高エネルギー光子の反応 $\alpha \to \beta$ で生成されるとき, (13.4.5) は,

$$T_{\beta f,\alpha} = \left(\Omega^-(\beta)^\dagger \Omega^+(\alpha)\right)_{f0} (T_S)_{\beta\alpha} \tag{13.4.12}$$

と簡単になる. ここで, 0 は軟光子の真空を表わし, $\Omega^\pm$ は以前のように計算されるが, 軟光子のみからなる小さなヒルベルト空間を用い, またこれらの光子の相互作用は β と α で表わされる固定した状態の全ての荷電粒子との相互作用ハミルトニアンをとる. 以前と全く同様に, これらの演算子は軟光子の「危険な」ヒルベルト空間 $\mathcal{D}$ ではユニタリーなので, 始状態について足し上げなくても,

$$\begin{aligned}\sum_{f\in\mathcal{D}} |T_{\beta f,\alpha 0}|^2 &= |(T_S)_{\beta\alpha}|^2 \left(\Omega^+(\alpha)^\dagger \Omega^-(\beta)\Omega^-(\beta)^\dagger \Omega^+(\alpha)\right)_{00} \\ &= |(T_S)_{\beta\alpha}|^2 \left(\Omega^+(\alpha)^\dagger \Omega^+(\alpha)\right)_{00} = |(T_S)_{\beta\alpha}|^2\end{aligned} \tag{13.4.13}$$

となる.†

13.5 軟光子の散乱*

この章での軟光子の相互作用の取り扱いは, これまでのところ過程 $\alpha \to \beta$ が進行中に軟光子が放出または吸収される過程のみを考察してきた. 過程 $\alpha \to \beta$ は自明だが, 軟光子が, 興味ある反応を生成する上で本質的な部分を担っているような過程について, 有用で一般的な事柄を述べることも可能だ. ここではこの種の最も簡単かつ重要な例である任意の種類とスピンを持ち質量がゼロでない粒子による軟光

† この場合は, (13.3.11) のような因子 $(E/\Lambda)^A$ が出てこない理由は, ここでは足し上げる実の軟光子状態の最大エネルギー E を, $\Omega^\pm$ を計算する際に足し上げる「危険な」軟光子状態の最大エネルギー Λ と等しく取っているからだ.

* この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

子の散乱を考察する. つまり, α と β は 1 粒子状態だ. ここで厄介なのは軟光子の散乱振幅の主要項は極の項から来るのではなく, 電流保存の条件によって極の項と関連している極でない項から来ることだ.

光子散乱の S 行列は以下の形に書ける.

$$S(q,\lambda;p,\sigma\to q',\lambda';p',\sigma') = i(2\pi)^4\delta^4(q+p-q'-p') \times \frac{\epsilon^*_\nu(\mathbf{q}',\lambda')\,\epsilon_\mu(\mathbf{q},\lambda)\,M^{\nu\mu}_{\sigma',\sigma}(q;\mathbf{p}',\mathbf{p})}{(2\pi)^6\sqrt{4q^0q'^0}}\,. \tag{13.5.1}$$

ここで q と q' は始状態と終状態の光子の 4 元運動量, p と p' は始状態と終状態の標的粒子の 4 元運動量, λ と λ' は始状態と終状態の光子のヘリシティ, $\epsilon_\nu(\mathbf{q}',\lambda')$ と $\epsilon_\mu(\mathbf{q},\lambda)$ は対応する光子の偏極ベクトル, σ と σ' は始状態と終状態の標的粒子のスピンの z 成分だ. 6.4 節の定理によれば, 振幅 $M^{\nu\mu}$ は次のように表わされる.

$$(2\pi)^{-3}M^{\nu\mu}_{\sigma',\sigma}(q;\mathbf{p}',\mathbf{p}) = \int d^4x\,e^{iq\cdot x}\Big(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'},T\{J^\nu(0),J^\mu(x)\}\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big)+\cdots\,. \tag{13.5.2}$$

ここで $J^\mu(x)$ は電磁カレントで, 「$\cdots$」は 2 個の光子が別々のカレントとではなく一つの頂点で相互作用する荷電スカラー場の理論のように可能な「かもめ」(seagull) 項を表わす. 10 章で説明し 13.1 節ですでに使った標準的な極の議論を繰り返す. 中間状態の完全系を (13.5.2) の電流演算子の間に挿入して x について積分し 1 粒子中間状態を分離すると,

$$M^{\nu\mu}(q;\mathbf{p}',\mathbf{p}) = \frac{G^\nu(\mathbf{p}',\mathbf{p}+\mathbf{q})G^\mu(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p})}{E(\mathbf{p}+\mathbf{q})-E(\mathbf{p})-q^0-i\epsilon} + \frac{G^\mu(\mathbf{p}',\mathbf{p}'-\mathbf{q})G^\nu(\mathbf{p}'-\mathbf{q},\mathbf{p})}{E(\mathbf{p}'-\mathbf{q})-E(\mathbf{p}')+q^0-i\epsilon} + N^{\nu\mu}(q;\mathbf{p}',\mathbf{p}) \tag{13.5.3}$$

が得られる. ここで G^μ は電流の 1 粒子行列要素,

$$(2\pi)^{-3}G^\mu_{\sigma',\sigma}(\mathbf{p}',\mathbf{p}) \equiv \Big(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'},J^\mu(0)\,\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big) \tag{13.5.4}$$

で, $N^{\nu\mu}$ は 1 粒子状態以外の状態の寄与と任意の 2 光子直接相互作用の項を表わす. ((13.5.3) はスピンの添字は陽に示していないが行列の積の意味で理解する.) $N^{\nu\mu}$ については, $q^\mu \to 0$ で最初の 2 項が示すような特異性を持たず, よって q^μ の冪に展開できるということ以外, ほとんど何も知られていない.

ここで次の電流保存 (あるいはゲージ不変性) の条件を使う.

$$q_\mu M^{\nu\mu}(q;\mathbf{p}',\mathbf{p}) = 0\ , \tag{13.5.5}$$

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{G}(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}) = [E(\mathbf{p}+\mathbf{q}) - E(\mathbf{p})]G^0(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p})\ , \tag{13.5.6}$$

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{G}(\mathbf{p}',\mathbf{p}'-\mathbf{q}) = [E(\mathbf{p}') - E(\mathbf{p}'-\mathbf{q})]G^0(\mathbf{p}',\mathbf{p}'-\mathbf{q})\ . \tag{13.5.7}$$

これを (13.5.3) に適用すると, $N^{\nu\mu}$ に必要な条件が得られる.

$$\begin{aligned} q_\mu N^{\nu\mu}(q;\mathbf{p}',\mathbf{p}) = &-G^\nu(\mathbf{p}',\mathbf{p}'+\mathbf{q})\,G^0(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}) \\ &+G^0(\mathbf{p}',\mathbf{p}'-\mathbf{q})\,G^\nu(\mathbf{p}-\mathbf{q},\mathbf{p})\ . \end{aligned} \tag{13.5.8}$$

また $M^{\nu\mu}$ は「交差対称性」の条件,

$$M^{\nu\mu}(q;\mathbf{p}',\mathbf{p}) = M^{\mu\nu}(p'-p-q;\mathbf{p}',\mathbf{p}) \tag{13.5.9}$$

を満たし, (13.5.3) の極の項は明らかにこの条件を満たすので $N^{\nu\mu}$ もこれを満たす.

$$N^{\nu\mu}(q;\mathbf{p}',\mathbf{p}) = N^{\mu\nu}(p'-p-q;\mathbf{p}',\mathbf{p})\ . \tag{13.5.10}$$

これらの条件を使って $N^{\nu\mu}$ の運動量についての冪展開の第 1 項を決定しよう.

まず 1 粒子電流行列 $G^\mu(\mathbf{p}',\mathbf{p})$ の運動量 $\mathbf{p}'$ と $\mathbf{p}$ とに関する冪展開について議論する必要がある. 空間反転不変性より (それが成立している程度に), G^0 と G^i $(i = 1,2,3)$ の展開はそれぞれ運動量の偶数次と奇数次の項のみを含む. (10.6.3) によれば, $G^0_{\sigma',\sigma}$ の運動量について

ゼロ次の項は, e を粒子の電荷として $e\delta_{\sigma',\sigma}$ だ. すると, 電流保存の条件より運動量の 2 次で,

$$(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\cdot\mathbf{G}_{\sigma',\sigma}(\mathbf{p}',\mathbf{p})=\left(\frac{\mathbf{p}'^2}{2m}-\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)e\delta_{\sigma',\sigma}$$

となることが分かる. よって $\mathbf{G}$ の運動量について 1 次の項は $e(\mathbf{p}'+\mathbf{p})\delta_{\sigma',\sigma}/2m$ に加えて $\mathbf{p}'-\mathbf{p}$ に垂直な 1 次の項がありえる. 後者は回転不変性より $(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\times\mathbf{J}_{\sigma',\sigma}$ に比例しなければならない. ここで, $\mathbf{J}$ は荷電粒子のよく知られたスピン行列だ. これらの結果をまとめると, 以下の展開を得る.

$$G^0(\mathbf{p}',\mathbf{p})=e1+2\,\text{次項}\,, \tag{13.5.11}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{p}',\mathbf{p})=\frac{e1}{2m}(\mathbf{p}'+\mathbf{p})+\frac{i\mu}{j}\mathbf{J}\times(\mathbf{p}'-\mathbf{p})+3\,\text{次項}\,. \tag{13.5.12}$$

ここで「1」は単位スピン行列で,「2 次項」と「3 次項」は小さな運動量 $\mathbf{p}$ と $\mathbf{p}'$ についての冪展開で無視した項の次数を表わす. (13.5.12) の係数 μ/j は電流がエルミートだから実だ. 係数をこのように書くと (j を荷電粒子のスピンとして), μ は粒子の磁気モーメントとして知られている量となる.

さて $N^{\nu\mu}$ に戻って (13.5.8) の小さな運動量 q^μ, $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ についての展開を考察する. (13.5.8) で $\nu=0$ ととると $q_\mu N^{0\mu}$ は少なくともこれらの小さな量に関して 2 次だ. q^μ に直交する定数ベクトルはないので, $N^{0\mu}$ は小さな運動量について少なくとも 1 次でなければならない. すると交差対称性の条件 (13.5.10) より N^{i0} もまた小さな運動量について少なくとも 1 次でなければならない. (13.5.8) で $\nu=i$ ととり (13.3.12) を使うと,

$$q_kN^{ik}=-\frac{e^2q^i}{m}+2\,\text{次項}$$

となり, よって,

$$N^{ik}=-\frac{e^2}{m}\delta_{ik}+1\,\text{次項} \tag{13.5.13}$$

を得る. G^i は小さな運動量に関して少なくとも 1 次なので, (13.5.3) で M^{ik} の極の項も 1 次であり, ゼロ次では極を持たない項 N^{ik} のみが残る.

$$M^{ik}(0;0,0) = N^{ik}(0;0,0) = -\frac{e^2}{m}\delta_{ik} \,. \qquad (13.5.14)$$

これより軟光子散乱の断面積を計算できる. しかしこの計算をする必要はない. 運動量がゼロの極限で光子の散乱振幅は標的粒子の質量と電荷のみに依存し, それは電荷の 2 次だと分かったので, 任意スピンの標的粒子による光子の散乱断面積のどの 2 次の計算の結果もただちに使える. それは例えば量子電磁理論の光子散乱の微分断面積の結果 (8.7.42) だ.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{32\pi^2 m^2}(1+\cos^2\theta) \,. \qquad (13.5.15)$$

これは, 質量 m, 電荷 e で任意の種類とスピンの標的粒子の低エネルギー極限で正しい普遍的な式であることがここで分かった. この標的粒子は原子核のような強い相互作用をする複合粒子であってもよい。ゲルマン, ゴールドバーガー, ロー[8]は, これらの結果を拡張して軟光子散乱振幅の主要項の次の次数の項が標的粒子の質量, 電荷, 磁気モーメントを使って与えられることを示した.

13.6 外場近似*

原子核のような重い荷電粒子は近似的に古典的な外場の源のように振舞うことは直感的に明らかだ. この節ではこの近似がいかに正当化されるかを見, その限界についての理解を深める.

重い荷電粒子がダイアグラムを通って始状態から終状態に至る間に 4 元運動量 $q_1, q_2, \cdots q_N$ と偏極の添字 $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_N$ を持つ N 個の質

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

量殻外の光子を放出するファインマン・ダイアグラムまたはファインマン・ダイアグラムの一部を考えよう. そのようなダイアグラムまたは (N 個の光子のプロパゲーターを含まない) 部分ダイアグラム全ての和をとると次の振幅が得られる.

$$\int d^4x_1\, d^4x_2 \cdots d^4x_N\, e^{-iq_1\cdot x_1} e^{-iq_2\cdot x_2} \cdots e^{-iq_N\cdot x_N}$$
$$\times \langle \mathbf{p}', \sigma' | T\Big\{ J^{\mu_1}(x_1),\, J^{\mu_2}(x_2),\, \cdots J^{\mu_N}(x_N) \Big\} | \mathbf{p}, \sigma \rangle$$
$$\equiv \mathcal{G}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N}_{\sigma',\sigma}(q_1, q_2, \cdots q_N; p)\,. \tag{13.6.1}$$

ここで行列要素は, 重い粒子が関与する強い核力を含めた全ての相互作用を取り入れて計算する. この振幅は $q_1, q_2, \cdots q_N \to 0$ で多重の極を持つ. この極は, 電流の積の行列要素で中間状態が始状態および終状態とちょうど同じ重い粒子からなる項から生じる. この多重の極は $q_1, q_2, \cdots q_N$ の全ての成分が (多分複合粒子である) 重い粒子の力学に関与する全てのエネルギーと運動量に比べて小さいとき (13.6.1) のなかで支配的になる. この場合 10.2 節の方法より以下のようになる.**

$$\mathcal{G}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N}_{\sigma',\sigma}(q_1, q_2, \cdots q_N; p) \to \frac{(-i)^{N-1}}{2p^0(2\pi)^3}\,(2\pi)^4$$
$$\times\, \delta^4(p' + q_1 + q_2 + \cdots + q_N - p) \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_{N-1}}$$
$$\times\, \frac{\mathcal{G}^{\mu_1}_{\sigma',\sigma_1}(p)\, \mathcal{G}^{\mu_2}_{\sigma_1,\sigma_2}(p) \cdots \mathcal{G}^{\mu_N}_{\sigma_{N-1},\sigma}(p)}{[2p\cdot q_1 - i\epsilon][2p\cdot(q_1+q_2) - i\epsilon]\cdots[2p\cdot(q_1 + \cdots + q_{N-1}) - i\epsilon]}$$
$$+\, [\text{置換}]\,. \tag{13.6.2}$$

ここで,

$$\frac{\mathcal{G}^{\mu}_{\sigma',\sigma}(p)}{2p^0(2\pi)^3} \equiv \langle \mathbf{p}, \sigma' | J^\mu(0) | \mathbf{p}, \sigma \rangle \tag{13.6.3}$$

**摂動論では, この分母はプロパゲーターの分母から次のように生じる.

$$(p' + q_1 + \cdots q_r)^2 + m^2 - i\epsilon \to 2p'\cdot(q_1 + \cdots q_r) - i\epsilon$$
$$\to 2p\cdot(q_1 + \cdots q_r) - i\epsilon\,.$$

一方プロパゲーターの分子は因子 $\sum uu^\dagger$ を与え, それと光子を放出する頂点の行列とで (13.6.3) の行列要素を生じる. 行列 $\mathcal{G}^\mu$ は前節の行列 G^μ と因子 $2p^0$ だけ異なる.

で [置換] は N 個の光子の全ての置換についての和をとるという意味だ. 原子系に適用するには, (13.6.1) は原子核のように電磁相互作用ばかりでなく強い相互作用もする任意スピンの粒子について成り立つことに気付くことが重要だ.

任意のスピンと電荷 Ze の粒子の場合に, 4 元運動量が等しい状態間でとった電流の行列要素は,†

$$\langle p, \sigma' | J^\mu(0) | p, \sigma \rangle = \frac{Ze\, p^\mu \delta_{\sigma'\sigma}}{p^0 (2\pi)^3} \tag{13.6.4}$$

であり, よって以下を得る.

$$\mathcal{G}^\mu_{\sigma'\sigma}(p) = 2Ze\, p^\mu \delta_{\sigma'\sigma} \,. \tag{13.6.5}$$

(13.6.5) で重要なことは, これらの行列が全て交換し, よってその積は置換についての和の外にくくり出せることだ.

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_N}_{\sigma',\sigma}(q_1, q_2, \cdots q_N; p) \quad \to \\ &\frac{(-i)^{N-1} (Ze)^N p^{\mu_1} p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_N}}{p^0 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(p' + q_1 + q_2 + \cdots + q_N - p) \delta_{\sigma',\sigma} \\ &\times \Bigg[\frac{1}{[p \cdot q_1 - i\epsilon][p \cdot (q_1 + q_2) - i\epsilon] \cdots [p \cdot (q_1 + \cdots + q_{N-1}) - i\epsilon]} \\ &\qquad + [\text{置換}] \Bigg] \;. \end{aligned} \tag{13.6.6}$$

q について最低次でこの式のデルタ関数は,

$$\begin{aligned} &\delta^4(p' + q_1 + \cdots + q_N - p) \\ &\qquad = p^0 \delta^3(\mathbf{p}' + \mathbf{q}_1 + \cdots + \mathbf{q}_N - \mathbf{p}) \delta(p \cdot (q_1 + \cdots + q_N)) \end{aligned} \tag{13.6.7}$$

---

†これを最も簡単に証明するにはまず, 粒子が静止しているローレンツ系では回転不変性より電流の行列要素の空間成分がゼロになり, 時間成分が $\delta_{\sigma',\sigma}$ に比例して σ と σ' 以外には依存しないことに気付くことだ. 比例定数は (10.6.3) で与えられ, 次にローレンツ変換から (13.6.4) が得られる.

と書ける. さいわい, ここでの置換についての和の結果は個々の項よりはるかに簡単になる. $p\cdot(q_1+\cdots+q_N)=0$ のとき, 次のようになる.

$$\left[\frac{1}{[p\cdot q_1-i\epsilon][p\cdot(q_1+q_2)-i\epsilon]\cdots[p\cdot(q_1+\cdots+q_{N-1})-i\epsilon]}\right.$$
$$\left.+[\text{置換}]\right]=(2i\pi)^{N-1}\delta(p\cdot q_1)\,\delta(p\cdot q_2)\cdots\delta(p\cdot q_{N-1})\,. \qquad (13.6.8)$$

例えば, $N=2$ の場合これは,

$$\frac{1}{[p\cdot q_1-i\epsilon]}+\frac{1}{[p\cdot q_2-i\epsilon]}=\frac{1}{[p\cdot q_1-i\epsilon]}+\frac{1}{[-p\cdot q_1-i\epsilon]}=2i\pi\delta(p\cdot q_1)$$

という意味だ. 一般の場合の結果 (13.6.8) は恒等式,

$$\theta(\tau_1-\tau_2)\,\theta(\tau_2-\tau_3)\cdots\theta(\tau_{N-1}-\tau_N)+[\text{置換}]=1$$

のフーリエ変換として最も簡単に得る事ができる. (13.6.8) を (13.6.6) に代入すると (13.6.1) についての最終的な結果が次のように得られる.

$$\mathcal{G}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N}_{\sigma',\sigma}(q_1,q_2,\cdots q_N;p)\to(Ze)^N(2\pi)^N\,\delta_{\sigma',\sigma}\,p^{\mu_1}p^{\mu_2}\cdots p^{\mu_N}$$
$$\times\,\delta^3(\mathbf{p}'+\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\cdots+\mathbf{q}_N-\mathbf{p})$$
$$\times\delta(p\cdot q_1)\,\delta(p\cdot q_2)\cdots\delta(p\cdot q_N)\,. \qquad (13.6.9)$$

この結果はゆっくり運動する重い粒子ばかりでなく相対論的な粒子についても成り立ち, 荷電粒子散乱の「ワイツゼッカー (Weizsäcker)・ウィリアムス (Williams)」近似[9]を導くのに使える. $|\mathbf{p}|\ll p^0$ を満たす非相対論的な重い荷電粒子という特別な場合には, (13.6.9) はさらに,

$$\mathcal{G}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N}_{\sigma',\sigma}(q_1,q_2,\cdots q_N;p)\to(Ze)^N(2\pi)^N n^{\mu_1}n^{\mu_2}\cdots n^{\mu_N}$$
$$\times\delta^3(\mathbf{p}'+\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\cdots+\mathbf{q}_N-\mathbf{p})$$
$$\times\delta(q_1^0)\,\delta(q_2^0)\cdots\delta(q_N^0)\,\delta_{\sigma',\sigma} \qquad (13.6.10)$$

と簡単になる. ここで n は以下の時間的な単位ベクトルだ.

$$n^0 = 1 \,, \qquad \mathbf{n} = 0 \,.$$

運動量空間の規格化された波動関数 $\chi_\sigma(\mathbf{p})$ を持つ電荷 Ze の 1 個の重い非相対論的な粒子が始状態と終状態の両方に現れるとしよう. デルタ関数のフーリエ表現を (13.6.10) に使って, この状態での $\mathcal{G}$ の行列要素は,

$$\int d^3p\, d^3p'\; \chi^*_{\sigma'}(\mathbf{p}')\, \chi_\sigma(\mathbf{p})\, \mathcal{G}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N}_{\sigma',\sigma}(q_1, q_2, \cdots q_N; p) \to$$
$$\int d^3X \sum_\sigma |\psi_\sigma(\mathbf{X})|^2 \prod_{r=1}^N 2\pi\, Ze\; n^{\mu_r}\delta(q^0_r) e^{-i\mathbf{q}_r\cdot\mathbf{X}} \qquad (13.6.11)$$

となる. ここで, $\psi(\mathbf{X})$ は座標空間の波動関数だ.

$$\psi_\sigma(\mathbf{X}) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3p\, \chi_\sigma(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{X}} \,. \qquad (13.6.12)$$

(13.6.11) の因数分解のおかげで, この状態の重い荷電粒子を含める効果は, 運動量空間のファインマン則に任意個の新しい種類の頂点を付け加えるのと同じだ. その頂点では, 電子のような電荷 $-e$ の軽いディラック粒子は外場と相互作用し, そのような各頂点毎に全体の振幅に (光子のプロパゲーターと電子・光子頂点を含んだ),†

$$i\int d^4q\, \left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2 - i\epsilon}\right] \left[2\pi\, Ze\; n_\mu \delta(q^0) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{X}}\right]$$
$$\times \left[(2\pi)^4\, e\,\gamma^\mu\, \delta^4(k - k' - q)\right] \qquad (13.6.13)$$

の因子の寄与を与える. ここで k と k' は始状態と終状態の電子の 4 元運動量だ. そして完全な散乱振幅は重い粒子の位置 $\mathbf{X}$ について $\sum_\sigma |\psi_\sigma(\mathbf{X})|^2$ の重み関数で平均をとらなければならない. 因子

---

† この最初の因子はファインマン則で重い荷電粒子の相互作用ラグランジアンの定数に付いている通常の因子 i だ.

(13.6.13) は相互作用ラグランジアンに新しい項,

$$\mathcal{L}_{\rm ext}(x) = \mathcal{A}_\mu(x)\, J_e^\mu(x) \tag{13.6.14}$$

を導入することによって生成されるものと同じだ. ここで $J_e^\mu \equiv -ie\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ は電子の電流で, $\mathcal{A}^\mu$ は以下の外部ベクトル・ポテンシャルだ.

$$\mathcal{A}^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\, e^{iq\cdot x}\left[\frac{2\pi\, Ze\, n^\mu \delta(q^0) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{X}}}{q^2 - i\epsilon}\right]. \tag{13.6.15}$$

もちろんこれはまさに通常のクーロン・ポテンシャルだ.

$$\mathcal{A}^0(x) = \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{X}|}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{A}}(x) = 0\,. \tag{13.6.16}$$

(分子中のように) 2 個以上の重い荷電粒子がある場合は, $\mathcal{A}^\mu(x)$ を各々の電荷 Ze と位置 $\mathbf{X}$ を持つ (13.6.16) のような項の和で表わさなければならない.

外場近似を使うときにどのようなダイアグラムの和をとっているのかを心に留めておくことは有用だ. 1 個の電子 (相対論的か非相対論的かにかかわらず) と陽子や重陽子のような 1 個の重い荷電粒子との相互作用を考える. もし他の全ての相互作用を無視すれば, 外場との相互作用による電子の散乱のファインマン・ダイアグラムは電子の線に電子・外場の頂点 (13.6.14) を任意個挿入するだけのダイアグラムだ. (図 13.4 を見よ.) しかし (13.6.2) の置換についての和で示したように, 外場近似でのこれらのダイアグラムは, 基礎にある理論では電子の線についた光子があらゆる可能な順序で重い荷電粒子についたダイアグラムから来る. (図 13.5 を見よ.) 図 13.5 の (L を付けた)「交差しない梯子」ダイアグラムは, 重い荷電粒子だけでなく電子も非相対論的でなければこの和の中で支配的な大きさにはならない. (これらのダイアグラムは旧式の摂動論では中間状態が始状態および終状態

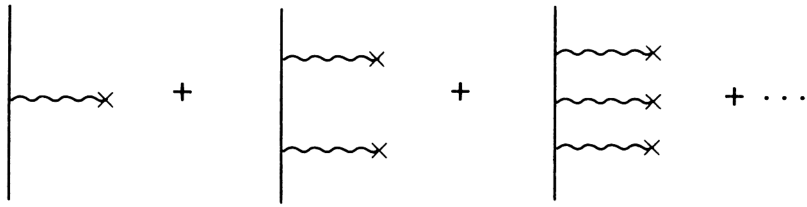


図 13.4: 外部電磁場による電子散乱のダイアグラム. ここで直線は電子を表し, ×印で終わる波線は外場との相互作用を表す.

と同じ粒子を含む項からの寄与を含み, 電子と重い荷電粒子が両方とも非相対論的なら小さなエネルギー分母を生じるが, 図 13.5 の他の全てのダイアグラムは余分な光子か電子・陽電子対か重い粒子・反粒子対のどれかをともなう中間状態に対応し, それは大きなエネルギー分母により小さく押さえられている.) 交差しない梯子ダイアグラムは**ベーテ・サルピータ方程式** (Bethe–Salpeter equation)[10] として知られている積分方程式を解くことによって足し上げることができる. しかし, 両方の粒子がともに非相対論的でなければダイアグラムのこの部分集合を選び出す理論的根拠はない. 両方が非相対論的な場合はベーテ・サルピータ方程式は単に通常の非相対論的なシュレーディンガー方程式に, 小さな摂動として取り扱えるスピン・軌道結合にともなう相対論的な補正を加えたものになってしまう. 束縛状態における相対論的な効果と輻射補正の理論はいまだ完全に満足のいく形にはなっていないと言わねばならない.

外場 (13.6.16) を導く際に重い荷電粒子と電磁場の相互作用を光子の運動量について最低次までだけ評価した. 重い粒子の磁気双極子モーメント, 電気 4 重極モーメント等からは光子の運動量について高次の補正が生じる. またもちろん, 光子が電子の線から放出後吸収さ

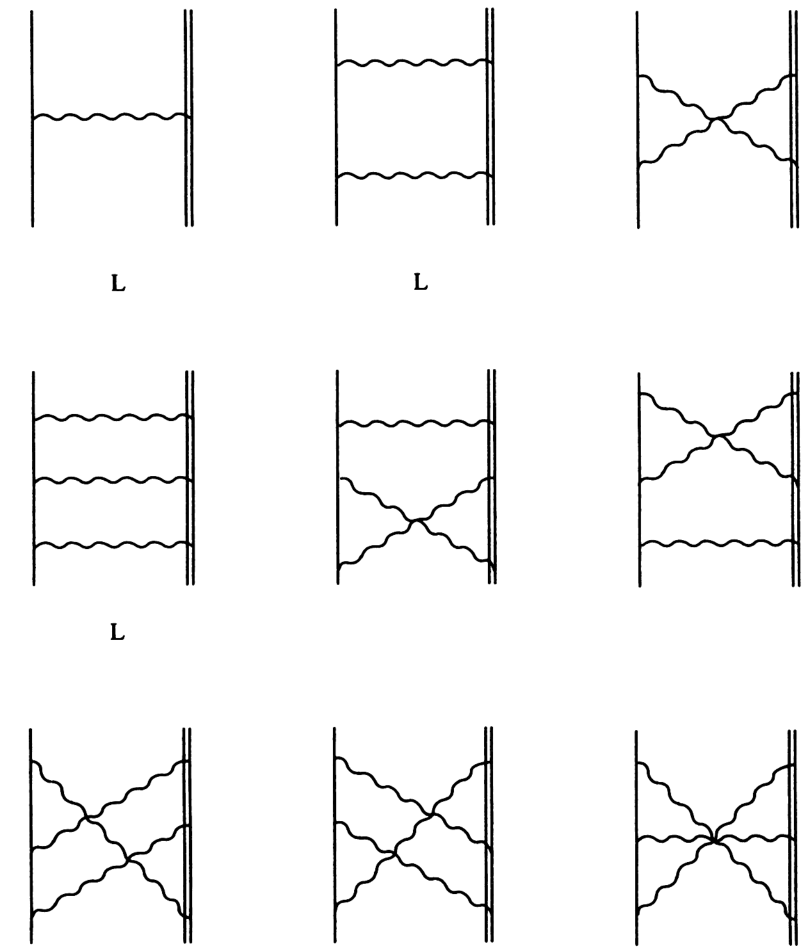


図 13.5: 重い荷電標的粒子による電子散乱のダイアグラム．これは標的粒子の質量が大きい極限で図 13.4 のダイアグラムと同じ結果を生じる．ここで 1 重の直線は電子で, 2 重の直線は重い標的粒子だ．また波線は仮想光子だ．「L」の印を付けたダイアグラムは交差しない梯子 (ladder) ダイアグラムと呼ばれ, 標的粒子だけでなく電子も非相対論的なときには和の中で支配的な部分となる．

れるダイアグラムや電子のループが光子の線に挿入されるダイアグラムのように, 図 13.4 のダイアグラムを越えるファインマン・ダイアグラムから生じる輻射補正もある. 次章で見るように, 束縛状態では図 13.4 のダイアグラムは全次数にわたって含めねばならないが, 他の全ての光子の運動量および e について高次の補正はこれらのダイアグラムへの摂動として取り入れることができる.

問題

1. 重心系で 1 GeV のエネルギーと 90° の散乱角の過程 $e^+ + e^- \to \pi^+ + \pi^-$ を考える. 終状態のパイ中間子のエネルギーを測定して $E_T \ll 1$ GeV を越えないエネルギーが軟光子として放出されたと決めたとしよう. 反応率は E_T にどのように依存するか?

2. スカラー場 ϕ で記述される質量ゼロ, スピンゼロの粒子を考える. その相互作用ラグランジアン密度は $\phi(x)J(x)$ の形で, $J(x)$ は質量がゼロでない粒子のみを含むとする. 過程 $\alpha \to \beta$ で任意個の低エネルギー・スカラー粒子が放出され, これらの低エネルギー・スカラー粒子の全エネルギーがある小さな値 E_T 以下となる反応率の式を導け. エネルギーがある小さな値 Λ 以下の低エネルギー・スカラーによる輻射補正を含めよ.

3. 任意の標的による低エネルギー光子の散乱において式 (13.5.14) の次の次数の項を導け.

4. 非常に小さな質量 m のスピン 1 粒子がベクトル場 $V^\mu(x)$ で記述され, その場はディラック場 $\psi(x)$ で記述されるはるかに重いフェルミオンとだけ $gV^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ の形の相互作用密度で結合するとする. 重いフェルミオンは常態では, V^μ とは相互作用しない他の粒子に崩壊し, m よりはるかに大きなエネルギー W を解

放するとする. そのような崩壊過程で, 1 個の余分な V^μ 粒子が他の崩壊生成粒子とともに放出され, そのベクトル粒子のエネルギーが, $W \gg E \gg m$ を満たす上限 E 以下の場合を考える. この過程の反応率は E と m とにどのように依存するか? 輻射補正は無視せよ.

5. (13.6.8) が $p \cdot (q_1 + \cdots q_N) = 0$ のとき成り立つことを証明せよ.

参考文献

1. F. Bloch and A. Nordsieck, *Phys. Rev.* **37**, 54 (1937); D. R. Yennie, S. C. Frautschi, and H. Suura, *Ann. Phys. (NY)* **13**, 379 (1961). また K. T. Mahantappa, ハーバード大学博士論文 (1961) (未発表) も見よ.

2. S. Weinberg, *Phys. Lett.* **9**, 357 (1964); *Phys. Rev.* **135**, B1049 (1964).

3. S. Weinberg, *Phys. Rev.* **140**, B515 (1965).

4. この位相は非相対論的クーロン散乱の摂動級数に出て来る. R. H. Dalitz, *Proc. Roy. Soc. London* **206**, 509 (1951).

5. 例えば L. I. Schiff, *Quantum Mechanics* 第 3 版 (McGraw-Hill, New York, 1968)(シッフ著「新版 量子力学」井上健訳, 吉岡書店) 22 節を見よ.

6. T. D. Lee and M. Nauenberg, *Phys. Rev.* **133**, B1549 (1964). また T. Kinoshita, *J. Math. Phys.* **3**, 650 (1962); G. Sterman and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1416 (1977) も見よ.

7. G. Sterman and S. Weinberg, 参考文献 6.

8. F. E. Low, *Phys. Rev.* **96**, 1428 (1954); M. Gell-Mann and M. L. Goldberger, *Phys. Rev.* **96**, 1433 (1954). また S. Weinberg, *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory — 1970 Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics*, S. Deser, M. Grisaru, and H. Pendleton 編 (MIT Press, Cambridge, MA, 1970) も見よ.

9. E. J. Williams, *Kgl. Dan. Vid. Sel. Mat.-fys. Medd.* **XIII**, No. 4 (1935).

10. H. A. Bethe and E. E. Salpeter, *Phys. Rev.* **82**, 309 (1951); **84**, 1232 (1951).

第 14 章

外場による束縛状態

11 章では，摂動論の最低次から 1 段階だけ進んで輻射補正の計算を行った．しかし，ある種の重要な問題では，もっとも単純な計算においても e などの結合定数について任意の高次のファインマン・ダイアグラムの組を当初から考慮に入れなければならない．これらの問題とは，束縛状態を含むものだ．量子電磁理論では，この束縛状態には通常の原子・分子が含まれるし，またポジトロニウムやミューオニウムなどのような変種の原子も含まれる．

そのような問題では普通の摂動論が役に立たないことは簡単にわかる．例えば，電子・陽子散乱の振幅を重心エネルギー E の関数として考える．10.3 節で示したように，水素原子の基底状態のような束縛状態が存在すると，この散乱振幅は $E = m_p + m_e - 13.6$ eV で極を持つ．しかし，電子・陽子散乱の摂動級数のどの項にもそのような極はない．したがって，全てのダイアグラムの和が重心エネルギー $m_p + m_e$ の近くで発散することによってのみ，極が生じることができる．

この摂動級数が発散する理由は簡単に見ることができる．これは，ファインマン・ダイアグラムの代わりに旧式の摂動論を使うと特にわかりやすい．重心系で電子と陽子の運動量の大きさが $q \ll m_e$ であり，

中間状態で電子と陽子の運動量が同じ q の程度の大きさだが値は異なるとする. この中間状態のエネルギー分母からくる寄与は $[q^2/m_e]^{-1}$ の程度の大きさだ. また, クーロン相互作用の行列要素は (e^2/r のフーリエ変換から) e^2/q^2 の程度の大きさだ. 対応する運動量積分からは q^3 の程度の大きさの因子が生じる. これらをまとめると, クーロン相互作用一つにつき,

$$[q^2/m_e]^{-1}\,[e^2/q^2]\,[q^3] = e^2 m_e/q$$

の寄与がある. したがって, 摂動論は q が $e^2 m_e$ の大きさか, それより小さければ成立しない. 言い換えると, 摂動論が成立しないのは, q^2/m_e の程度の大きさの運動エネルギーやポテンシャル・エネルギーが水素原子の束縛エネルギーの大きさである $e^4 m_e$ より大きくないときだ.

ここでの我々の問題は, 摂動論を使って束縛状態への輻射補正を計算する方法を学ぶことだ. これには, 全ての次数について足し上げなければならないダイアグラムは全て取り入れ, それに加えて, そのような足し上げをする必要の無いダイアグラムは有限個のみを取り入れることだ.

14.1 ディラック方程式

この章では, 電子 (またはミューオン) と原子核のような重い荷電粒子とのクーロン相互作用によってできる束縛状態に限って考察する. 13.6 節で示したように, この相互作用は相互作用ラグランジアンに c 数の外場のベクトル・ポテンシャル $\mathcal{A}^\mu(x)$ の効果を表す次の項を付

け加えれば取り入れることができる.*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = -ie\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\mathcal{A}_\mu - \frac{1}{2}(Z_3 - 1)(\partial^\mu\mathcal{A}^\nu - \partial^\nu\mathcal{A}^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$
$$-ie(Z_2 - 1)\mathcal{A}_\mu\,\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\,. \tag{14.1.1}$$

これは, (11.1.6) の相互作用部分で, 量子ベクトル・ポテンシャル A^μ を $A^\mu + \mathcal{A}^\mu$ で置き換えて得られる. 例えば, 電荷 Ze の重い1粒子が原点にあるとき,

$$\mathcal{A}^0(x) = \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}\,, \qquad \boldsymbol{\mathcal{A}}(x) = 0 \tag{14.1.2}$$

となる. この相互作用 (14.1.1) が全ての次数まで取り入れなければならない相互作用だ. この節では, この相互作用のみを持つ理論を考えて, 輻射補正は後の節で取り扱う.

物理学者は, このような問題については外場のもとでのディラックの波動方程式を解くやり方を幼稚園で教わる. ここでその方程式を導くのは不必要に思われるかも知れないが, 1章で強調したように, これをある種の相対論的シュレーディンガー方程式と考えるというディラックのもとの動機は, 詳細に調べると当たっていない. また, 我々の導出ではディラック方程式の解が満たすべき規格化条件が出るが, これはディラックの方法では多少天下り的なものだ. この節で論じるディラック方程式の解は, 次の節で輻射補正を扱う際に重要な役割をする.

ここでは, 演算子の時間発展を, (14.1.1) の外場との相互作用を含むがそれ以外の相互作用は含まないハミルトニアンで決めるという, 一種のハイゼンベルグ表示を使う. この表示では, 電子の場 $\psi(x)$ は以下の場の方程式を満たす.

$$\left[\gamma^\lambda\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + ie\gamma^\lambda\mathcal{A}_\lambda(x)\right]\psi(x) = 0\,. \tag{14.1.3}$$

*この章では, ハイゼンベルグ表示での電子の場を表すのに大文字の Ψ を使う記法に戻ることにする. 小文字の ψ はc数の外場 $\mathcal{A}^\mu(x)$ のみで決まる時間依存性を持つディラック場に使う.

これはディラック[1]の元の意味でのディラック方程式ではない. なぜなら, ここでの $\psi(x)$ は c 数の波動関数ではなく, 量子論的演算子だからだ. c 数のディラック波動関数は, Φ_N を状態ベクトルの完全正規直交系, Φ_0 を真空として,

$$u_N(x) \equiv (\Phi_0, \psi(x)\Phi_N) \ , \tag{14.1.4}$$

$$v_N(x) \equiv (\Phi_N, \psi(x)\Phi_0) \tag{14.1.5}$$

で定義される. (14.1.3) からすぐにこれらの関数が以下の斉次ディラック方程式を満たすことがわかる.

$$\begin{aligned}\left[\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + ie\gamma^\lambda \mathcal{A}_\lambda(x)\right] u_N(x) \\ &= \left[\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + ie\gamma^\lambda \mathcal{A}_\lambda(x)\right] v_N(x) \\ &= 0 \, . \end{aligned} \tag{14.1.6}$$

また, ディラック場の同時刻反交換関係から, 規格化条件を導くことができる. これらは相互作用 (14.1.1) に影響されないので, 以下の自由場と同じ形だ.

$$\left\{\psi(\mathbf{x},t), \bar{\psi}(\mathbf{y},t)\right\} = i\gamma^0\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \, . \tag{14.1.7}$$

真空期待値をとり, 状態 Φ_N についての和を挿入すると,

$$\sum_N u_N(\mathbf{x},t)u_N^\dagger(\mathbf{y},t) + \sum_N v_N(\mathbf{x},t)v_N^\dagger(\mathbf{y},t) = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{14.1.8}$$

となる. ここで, N についての和は, 全ての離散的束縛状態のみならず, 連続状態についての積分も含むと理解しておく.

我々は (14.1.2) のような時間に依存しない場合に主に興味がある. そのような場合には, 状態 Φ_N はハミルトニアン ((14.1.1) の相互作用

を含む) のエネルギー E_N の固有状態ととれる. 時間並進不変性から, $u_N(x)$ と $v_N(x)$ は以下の時間依存性を持つ.

$$u_N(\mathbf{x},t) = e^{-iE_N t}u_N(\mathbf{x}), \qquad v_N(\mathbf{x},t) = e^{+iE_N t}v_N(\mathbf{x})\,. \qquad (14.1.9)$$

このとき, 斉次ディラック方程式 (14.1.6) は以下となる.

$$i\gamma^0\left[\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m + ie\gamma^\lambda\mathcal{A}_\lambda(\mathbf{x})\right]\,u_N(\mathbf{x}) = E_N u_N(\mathbf{x})\,, \qquad (14.1.10)$$

$$i\gamma^0\left[\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m + ie\gamma^\lambda\mathcal{A}_\lambda(\mathbf{x})\right]\,v_N(\mathbf{x}) = -E_N v_N(\mathbf{x})\,. \qquad (14.1.11)$$

(14.1.11) の右辺の負の符号は v_N がディラックの有名な「負のエネルギー」解であることを示している. (14.1.8) から示せるように, これらの負のエネルギー解は波動関数の完全系を作るために必要だ. もちろん, 穏やかな外場のもとでは, 負のエネルギー状態は存在しないから, 全ての E_N は正だ. しかし, u_N がゼロでない状態と v_N がゼロでない状態の間には重要な差がある. 定義 (14.1.4) と (14.1.5) によれば, 状態は, その電荷が $-e$ か $+e$ であるときにのみ, それぞれ, $u_N \neq 0$ か $v_N \neq 0$ となれる. この意味で, ディラック方程式の負のエネルギー解は反粒子の存在とつながりがある. しかし, この議論はディラック方程式の詳細や, 電子のスピンとも全く関係が無い.

ディラックの波動方程式 (14.1.10) と (14.1.11) から, エネルギーの異なる波動関数は次のように直交していることが簡単にわかる.

$$(E_M - E_N^*)\left(u_N^\dagger\, u_M\right) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(u_N^\dagger\, i\gamma^0\boldsymbol{\gamma}u_M\right)\,.$$

だから, もし, $|\mathbf{x}|^2\left(u_N^\dagger\, i\gamma^0\boldsymbol{\gamma}u_M\right)$ が $|\mathbf{x}|\to 0$ と $|\mathbf{x}|\to\infty$ でゼロとなるなら,

$$\int d^3x\,\left(u_N^\dagger(\mathbf{x})u_M(\mathbf{x})\right) = 0 \quad (E_N \neq E_M^*\text{のとき}) \qquad (14.1.12)$$

となる. v_N に対して同様の境界条件を課すと, 同じようにして以下が導ける.

$$\int d^3x \left(v_N^\dagger(\mathbf{x})v_M(\mathbf{x})\right) = 0 \quad (E_N \neq E_M^* のとき), \tag{14.1.13}$$

$$\int d^3x \left(u_N^\dagger(\mathbf{x})v_M(\mathbf{x})\right) = 0 \quad (E_N \neq -E_M^* のとき). \tag{14.1.14}$$

$N = M$ ととると, (14.1.12) と (14.1.13) からエネルギーが全て実数であることがわかる. (14.1.12)–(14.1.14) の E_M から複素共役を落とすと, エネルギーが異なる u が直交し, エネルギーが異なる v が直交し, そして, (ポテンシャルが強すぎて負エネルギー状態ができない限り) 全ての u は全ての v と直交することがわかる. したがって, 状態をエネルギーとともに特徴づける離散的な量子数を適切に選べば, 常に以下のようにできる.

$$\int d^3x \left(u_N^\dagger(\mathbf{x})\, u_M(\mathbf{x})\right) = 0 \quad (N \neq M のとき), \tag{14.1.15}$$

$$\int d^3x \left(v_N^\dagger(\mathbf{x})\, v_M(\mathbf{x})\right) = 0 \quad (N \neq M のとき), \tag{14.1.16}$$

$$\int d^3x \left(u_N^\dagger(\mathbf{x})\, v_M(\mathbf{x})\right) = 0\,. \tag{14.1.17}$$

(14.1.8) に右から $u_M(\mathbf{y})$ か $v_M(\mathbf{y})$ をかけると, これらの波動関数が以下の規格化条件を満たすことがわかる.

$$\int d^3y \left(u_N^\dagger(\mathbf{y})u_M(\mathbf{y})\right) = \int d^3y \left(v_N^\dagger(\mathbf{y})v_M(\mathbf{y})\right) = \delta_{NM}\,. \tag{14.1.18}$$

ここで, δ_{NM} はクロネッカーのデルタと運動量空間のデルタ関数の積であり, その規格化は $\sum_N \delta_{NM} = 1$ が満たされるように $\sum_N$ の規格化と連動して決めてある. これらの規格化条件はディラック関数の確率解釈とは直接に何の関係も無く, その代わりに場の反交換関係 (14.1.7) から生じる.

いま, $\mathcal{A}^i = 0$ の純粋に静電的な外場に話を限る. 我々のディラック行列の標準的な表現では, $\boldsymbol{\sigma}$ を通常の 2×2 のパウリ行列のベクトルとして,

$$\boldsymbol{\gamma} = i\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad i\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となっている. ただし, ここで「1」と「0」は 2×2 の単位行列とゼロ行列を表す. 2 成分波動関数 f_N と g_N を以下で導入する.

$$u_N = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} f_N + ig_N \\ f_N - ig_N \end{pmatrix} . \tag{14.1.19}$$

こうすると, エネルギー固有値の条件 (14.1.10) は,

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla})\, f_N = (E_N + e\mathcal{A}^0 + m)\, g_N \;, \tag{14.1.20}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla})\, g_N = -(E_N + e\mathcal{A}^0 - m)\, f_N \tag{14.1.21}$$

となる. $e\mathcal{A}^0 r \approx Z\alpha \ll 1$ が満たされていて非相対論的な場合は, 束縛エネルギー $m - E_N$ は $Z^2\alpha^2 m$ の大きさであり, 微分演算子は $Z\alpha m$ の大きさだから, g_N は f_N に $Z\alpha$ の因子をかけた程度に小さい. (陽電子の波動関数 v_N については, 全ての E_N を $-E_N$ に置き換えればよい. したがって, この場合, f_N は g_N より同じ因子程度だけ小さい.) この非相対論的な場合はこの節の最後で論じる.

物理的状態は空間反転のもとでの偶・奇で分類できる. つまり, η_N を ± 1 の符号因子として,

$$\mathsf{P}\Phi_N = \eta_N \Phi_N \tag{14.1.22}$$

となる. 電子の固有パリティを $+1$ として, ディラック場は空間反転で,

$$\mathsf{P}\psi(\mathbf{x},t)\mathsf{P}^{-1} = \beta\,\psi(-\mathbf{x},t)$$

となった. したがって, (14.1.4) と (14.1.22) により, ディラック波動関数は以下のパリティ条件を満たす.

$$u_N(\mathbf{x}) = \eta_N \beta\, u_N(-\mathbf{x})\,. \tag{14.1.23}$$

これは,

$$f_N(\mathbf{x}) = \eta_N f_N(-\mathbf{x})\,, \qquad g_N(\mathbf{x}) = -\eta_N g_N(-\mathbf{x}) \tag{14.1.24}$$

とも書ける. 状態のパリティは $f_N(\mathbf{x})$ と同じで, $g_N(\mathbf{x})$ とは異なることに注意しておく.

ポテンシャル $\mathcal{A}^0$ が回転不変なときには, 波動方程式の解はその角運動量 j とパリティ η で分類できる. j が与えられた値のとき, f と g の成分は軌道角運動量 $\ell = j + \frac{1}{2}$ か $\ell = j - \frac{1}{2}$ の調和関数で展開できる. しかし, パリティが $\eta = (-1)^{j\mp\frac{1}{2}}$ と決まると, (14.1.24) から, f では $\ell = j \mp \frac{1}{2}$, g では $\ell = j \pm \frac{1}{2}$ しかないことがわかる. したがって, 通常の角運動量の和則に従うと, 全角運動量が j, 全角運動量の z 成分が μ, パリティが $(-1)^{j\mp\frac{1}{2}}$ の状態では,「大きな」2 成分波動関数 f は, 以下の形をとることがわかる.

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} C_{j\mp\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(j\;\mu\,;\,\mu-\frac{1}{2}\quad \frac{1}{2})\, Y^{\mu-\frac{1}{2}}_{j\mp\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{x}}) \\ C_{j\mp\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(j\;\mu\,;\,\mu+\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2})\, Y^{\mu+\frac{1}{2}}_{j\mp\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} F(|\mathbf{x}|)\,. \tag{14.1.25}$$

ここで, C と Y は通常のクレブシュ・ゴルダン係数と球面調和関数だ.[2] また, 全角運動量とパリティが与えられたとき, 同じ j と μ を持つが, パリティは異なる別の波動関数が演算子 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{x}}$ を施すことで構成できる. したがって,「小さな」成分は以下の形に書ける.

$$g(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{x}}) \begin{pmatrix} C_{j\mp\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(j\;\mu\,;\,\mu-\frac{1}{2}\quad \frac{1}{2})\, Y^{\mu-\frac{1}{2}}_{j\mp\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{x}}) \\ C_{j\mp\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(j\;\mu\,;\,\mu+\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2})\, Y^{\mu+\frac{1}{2}}_{j\mp\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} G(|\mathbf{x}|)\,. \tag{14.1.26}$$

通常, 状態の軌道角運動量 ℓ を,

$$\ell = j \mp \tfrac{1}{2} \tag{14.1.27}$$

すなわち「大きな」成分 $f(\mathbf{x})$ の軌道角運動量として定義する. こうすると, パリティは常に $(-1)^\ell$ となる.

(14.1.25) と (14.1.26) を (14.1.20) と (14.1.21) に代入すると, 連立微分方程式,

$$\frac{dG}{dr} + \frac{k+1}{r}G + (E + e\mathcal{A}^0 - m)F = 0\,, \tag{14.1.28}$$

$$\frac{dF}{dr} - \frac{k-1}{r}F - (E + e\mathcal{A}^0 + m)G = 0 \tag{14.1.29}$$

が得られる. ここで, パリティが $\eta = (-1)^{j\mp\frac{1}{2}}$ のとき,

$$k \equiv \pm(j + \tfrac{1}{2}) \tag{14.1.30}$$

と定義した.

ここで単純なクーロン場 (14.1.2) に話を限ることにする. そこでは $e\mathcal{A}^0 = Z\alpha/r$ となっている. この場合のディラック方程式の取り扱い[3]はよく知られているので, ここでは話を完全にするためにだけ簡単にまとめておくことにする. $s^2 = k^2 - Z^2\alpha^2$ として, 解が原点付近で r^{s-1} のように振舞うことは簡単にわかる. ($k^2 \geq 1$ により, 指数 s は $Z\alpha \leq 1$ に対して実だ.) $s < 0$ の解は, 規格化条件 (14.1.18) と矛盾するので除く. 波動関数が $r \to \infty$ で発散しない条件から, エネルギー固有値に許される値が決まる.

$$E_{n,j} = m\left[1 + \frac{Z^2\alpha^2}{n - j - \frac{1}{2} + \sqrt{(j+\frac{1}{2})^2 - Z^2\alpha^2}}\right]^{-1/2} . \tag{14.1.31}$$

ここで, n は「主量子数」であり,

$$j + \tfrac{1}{2} \leq n \tag{14.1.32}$$

を満たす. このエネルギーがパリティや ℓ に依存せず, n と j のみで決まることは注目に値する. n と j の値が与えられたとき, k の二つの符号, つまり二つのパリティに対応して, 二つの解がある. ただし $n = j + \frac{1}{2}$ のときは例外で, $k > 0$ でパリティは $(-1)^{j-\frac{1}{2}}$ しかなく, $\ell = j - \frac{1}{2}$ となっている. (14.1.32) から, これは, よく知られた非相対論的なときの $\ell \leq n - 1$ の制限と同じことがわかる.

$Z\alpha \ll 1$ を満たす軽い原子については, (14.1.31) は以下の冪展開を与える.

$$E = m\left[1 - \frac{Z^2\alpha^2}{2n^2} + \frac{Z^4\alpha^4}{n^4}\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2j+1}\right) + \cdots\right] . \qquad (14.1.33)$$

もちろん, 最初の 2 項は静止エネルギーと, 非相対論的シュレーディンガー方程式で与えられる束縛エネルギーだ. n だけでなく j にも初めて依存する項は第 3 項であり, これが最初の相対論的補正となる. $n = 1$ のときは全角運動量は $j = \frac{1}{2}$ のみしかなく, $n = j + \frac{1}{2}$ だから, パリティは $\ell = 0$ に対応する $(-1)^{j-\frac{1}{2}} = +1$ しかない. したがって, 水素原子の $n = 1$ 状態で, (14.1.33) の相対論的影響を見るのは困難だ. だたし, 14.3 節で述べるようにこれは最近になって可能になった. 一方, $n = 2$ については, 両方のパリティ(つまり, $2s_{1/2}$ と $2p_{1/2}$) の $j = \frac{1}{2}$ 状態と, $j = \frac{3}{2}$ で負パリティの $2p_{3/2}$ 状態がある. 水素原子の p 状態の間のエネルギー差は (14.1.33) により, 以下で与えられる.

$$E(2p_{3/2}) - E(2p_{1/2}) = \frac{\alpha^4 m_e}{32} = 4.5283 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV} . \qquad (14.1.34)$$

このような相対論的エネルギー差は原子状態の**微細構造** (fine structure) と呼ばれる. 当初から, この予言は観測される微細構造と良く一致していることが知られていた. 一方, ディラック方程式からは $2s_{1/2}$ 状態と $2p_{1/2}$ 状態とのエネルギー差は生じない. したがって, これらの状態は, 他の補正を探すのに適している. これは 14.3 節で論じる.

この節を終る前に, 一般的な静電的ポテンシャル $\mathcal{A}^0$ のもとでの非

相対論的な波動関数と行列要素の近似形について述べておく. (クーロン・ポテンシャルでは, これは, $Z\alpha \ll 1$ の極限となる.) ここで, $E_N + m \simeq 2m \gg |e\mathcal{A}^0|$ なので, 電子の波動関数の「小さな」成分は大きな成分を使って, 近似的に,

$$g_N \simeq (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}) f_N / 2m_e \tag{14.1.35}$$

と表される. これを使うと, (14.1.21) は単に非相対論的シュレーディンガー方程式,

$$\left[-\frac{\boldsymbol{\nabla}^2}{2m_e} - e\mathcal{A}^0 \right] f_N \simeq (E_N - m) f_N \tag{14.1.36}$$

となる. この f_N についての方程式にはスピンと軌道自由度の結合はないので, 解の完全系を,

$$f_N = \chi_N \, \psi_N(\mathbf{x})$$

という形で得ることができる. ここで, χ_N は 2 成分定数スピノルであり, $\psi_N(\mathbf{x})$ はシュレーディンガー方程式の通常の 1 成分解だ. しかし, 我々はしばしば全角運動量 j が決まった値の状態を扱う. このときは, (軌道角運動量がゼロでないとき) f_N はそのような項の和となる.

非相対論的近似では, ディラックの 4 成分の波動関数は以下の形をとる.

$$u_N \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}/2m) \, f_N \\ (1 - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}/2m) \, f_N \end{bmatrix} . \tag{14.1.37}$$

また, (14.1.18) は規格化条件,

$$\int d^3x (f_N^\dagger, f_M) \simeq \delta_{NM} - \tfrac{1}{4} \, (\mathbf{v}^2)_{NM} \tag{14.1.38}$$

を与える. ここで,

$$(\mathbf{v}^2)_{NM} \equiv -\frac{1}{m^2} \int d^3x f_N^\dagger(\mathbf{x}) \boldsymbol{\nabla}^2 f_M(\mathbf{x})$$

とした. 外場のもとでの行列要素を自由粒子の行列要素と関係付けるには, エネルギーの固有状態 N の運動量空間での波動関数が,

$$u_N(\mathbf{p}) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} u_N(\mathbf{x}) \simeq \sum_\sigma u(\mathbf{p},\sigma)[f_N(\mathbf{p})]_\sigma \tag{14.1.39}$$

と書けることを使うとよい. ここで, $u(\mathbf{p},\sigma)$ は以下の自由粒子のディラック・スピノルだ.

$$u(\mathbf{p},\sigma) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1-\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2m)\,\chi_\sigma \\ (1+\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2m)\,\chi_\sigma \end{bmatrix},$$

$$\chi_{+\frac{1}{2}} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi_{-\frac{1}{2}} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

また, $f_N(\mathbf{p})$ は 2 成分シュレーディンガー波動関数のフーリエ変換だ.

$$f_N(\mathbf{p}) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} f_N(\mathbf{x}) .$$

* * *

最後に, 各種の摂動の影響を計算する際に役立つように, 16 個の独立な 4×4 行列の電子での行列要素の主要な項を以下に挙げておく.

$$(\bar{u}_M\, u_N) \simeq (f_M^\dagger\, f_N) - \frac{1}{4m^2}(\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{\sigma}\cdot \nabla f_N)\,, \tag{14.1.40}$$

$$i(\bar{u}_M \gamma^0\, u_N) \simeq (f_M^\dagger\, f_N) + \frac{1}{4m^2}(\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{\sigma}\cdot \nabla f_N)\,, \tag{14.1.41}$$

$$(\bar{u}_M\, \boldsymbol{\gamma}\, u_N) \simeq \frac{1}{2m}[(\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{\sigma} f_N) - (f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{\sigma}\cdot \nabla\, f_N)]\,, \tag{14.1.42}$$

$$(\bar{u}_M\, [\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}]\, u_N) \simeq \frac{i}{m}[(\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{\sigma} f_N) + (f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{\sigma}\cdot \nabla\, f_N)]\,, \tag{14.1.43}$$

$$(\bar{u}_M\, [\gamma^i, \gamma^j]\, u_N) \simeq 2i\epsilon_{ijk}\,(f_M^\dagger \sigma_k f_N)\,, \tag{14.1.44}$$

$$(\bar{u}_M\, \gamma_5 \boldsymbol{\gamma}\, u_N) \simeq -i(f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma} f_N)\,, \tag{14.1.45}$$

$$(\bar{u}_M\, \gamma_5 \gamma^0\, u_N) \simeq \frac{1}{2m}[(\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma}\, f_N) - (f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma}\, \cdot \nabla\, f_N)]\,, \tag{14.1.46}$$

$$(\bar{u}_M\, \gamma_5\, u_N) \simeq \frac{i}{2m}[(\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma}\, f_N) + (f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma}\, \cdot \nabla\, f_N)]\,. \tag{14.1.47}$$

14.2 外場のもとでの輻射補正

前の節で得た結果に対する輻射補正を調べる. これは電子が重い荷電粒子の作る外場のみならず量子電磁場とも相互作用することによる. これらの輻射補正は, 通常のファインマン・ダイアグラムで, 電子のプロパゲーターとして外場のもとでのプロパゲーターを使うことによって, (それとともに, (14.1.1) にある外場に依存するくりこみ相殺項がでる) 外からかけられた電磁場の影響を全て取り入れて計算できる. より詳しく述べれば, 任意のダイアグラムの電子の内線に相互作用 (14.1.1) の初項に対応する頂点を任意の個数挿入すると, 裸の座標空間でのプロパゲーター $-iS(x-y)$ が以下の補正されたプロパゲーターに置き換えられる.

$$
\begin{aligned}
&-iS_{\mathcal{A}}(x,y)\\
&\equiv -iS(x-y)+(-i)^2\int d^4z_1\ S(x-z_1)e\gamma^\mu\mathcal{A}_\mu(z_1)S(z_1-y)\\
&\quad +(-i)^3\int d^4z_1\int d^4z_2\ S(x-z_1)e\gamma^\mu\mathcal{A}_\mu(z_1)S(z_1-z_2)\\
&\qquad\qquad\qquad \times e\gamma^\nu\mathcal{A}_\nu(z_2)S(z_2-y)\\
&\quad +\cdots\,.
\end{aligned}
\tag{14.2.1}
$$

ここで, いつものように,

$$
S(x-y)\equiv\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\ \frac{-i\gamma_\lambda p^\lambda+m}{p^2+m^2-i\epsilon}e^{ip\cdot(x-y)}
$$

だ. ($S_{\mathcal{A}}$ は $x-y$ の関数ではなく, x と y の関数として書かなければならない. これは, 外場が並進不変性を破るためだ.) 6.4 節で証明した定理によれば, (14.2.1) は,

$$
-iS_{\mathcal{A}}(x,y)=\left(\Phi_0,\,T\{\psi(x),\,\bar\psi(y)\}\Phi_0\right)_{\mathcal{A}} \tag{14.2.2}
$$

と同じだ. ここで, 右辺の添字 $\mathcal{A}$ は, 真空状態 Φ_0 と電子場 $\psi(x)$ は (14.1.1) の外場との相互作用のみを相互作用とするハイゼンベルグ表

示で定義されることを意味する. (14.2.2) に中間状態 Φ_N の完全系を挿入すると, プロパゲーターを前の節で導入したディラック波動関数 u_N と v_N で表す式が得られる.

$$-iS_{\mathcal{A}}(x,y) = \theta(x^0-y^0)\sum_N u_N(x)\bar{u}_N(y) - \theta(y^0-x^0)\sum_M v_M(x)\bar{v}_M(y)\ . \tag{14.2.3}$$

また, プロパゲーター (14.2.2) を非斉次ディラック方程式,

$$\left[\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + ie\gamma^\lambda \mathcal{A}_\lambda(x)\right] S_{\mathcal{A}}(x,y) = \delta^4(x-y) \tag{14.2.4}$$

の解として得ることもできる. この方程式は, 場の方程式 (14.1.3) と反交換関係 (14.1.7) から, もしくは, 形式的に摂動級数 (14.2.1) から導くことができる. また (14.2.3) からは, このプロパゲーターが満たす境界条件がわかる. そのフーリエ分解は, $x^0 - y^0 \to \infty$ のときに $E > 0$ として $\exp(-iE(x^0-y^0))$ に比例する「正振動数項」のみを含み, $x^0 - y^0 \to -\infty$ では $E > 0$ として $\exp(+iE(x^0-y^0))$ に比例する「負振動数項」のみを含む. このような境界条件のもとでの非斉次ディラック方程式を使えば, 外場が強すぎて摂動級数 (14.2.1) が使えないときにでも, プロパゲーターの数値解を求めることができる.[4] プロパゲーター $S_{\mathcal{A}}(x,y)$ が計算できれば, 外場のもとでの散乱振幅は, 通常のファインマン・ダイアグラムで $S_{\mathcal{A}}(x,y)$ を $S(x-y)$ の代わりに (そして, 適切なところに $\mathcal{A}$ に依存するくりこみ相殺項を挿入して) 計算できる.

さて, この補正されたプロパゲーターを用いた摂動級数を使ってどのように束縛状態のエネルギー準位の補正が求まるかを調べよう. 完全な電子のプロパゲーター $S'_{\mathcal{A}}(x,y)$ を考える.

$$-iS'_{\mathcal{A}}(x,y) \equiv \left(\Omega_0, T\left\{\Psi(x),\ \bar{\Psi}(y)\right\}\Omega_0\right)_{\mathcal{A}}\ . \tag{14.2.5}$$

このプロパゲーターには, 外場との電子の相互作用だけでなく, 量子電磁場との相互作用も入っている. ここで, $\Psi(x)$ は全ての相互作用を

含むハイゼンベルグ表示での電子場で, Ω_0 は完全なハミルトニアンの真空固有状態だ. 外場が時間に依存しない場合には, エネルギー E'_N を持つ完全なハミルトニアンの固有状態 Ω_N の完全正規直交系が存在する. これらの状態についての和を (14.2.5) の演算子積に挿入して, 以下を得る.

$$
\begin{aligned}
-iS'_{\mathcal{A}}(x,y) = \theta(x^0-y^0)e^{-iE'_N(x^0-y^0)}\sum_N U_N(\mathbf{x})\bar{U}_N(\mathbf{y}) \\
-\theta(y^0-x^0)e^{-iE'_N(y^0-x^0)}\sum_N V_N(\mathbf{x})\bar{V}_N(\mathbf{y}) .
\end{aligned}
\tag{14.2.6}
$$

ここで, 以下の定義を使った.

$$(\Omega_0, \Psi(\mathbf{x},t)\Omega_N) \equiv e^{-iE'_N t}U_N(\mathbf{x}) , \tag{14.2.7}$$

$$(\Omega_N, \Psi(\mathbf{x},t)\Omega_0) \equiv e^{+iE'_N t}V_N(\mathbf{x}) . \tag{14.2.8}$$

(和は, 離散的な束縛状態についての和のみならず, 連続状態についての積分も含む. 前と同じように, U_N と V_N は, 状態 Ω_N がそれぞれ, 電荷 $-e$ と e を持つときにのみゼロでない.) プロパゲーターは時間の関数だが, エネルギーの関数として再定義できる.

$$S'_{\mathcal{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx^0\, e^{iE(x^0-y^0)}S'_{\mathcal{A}}(x,y) . \tag{14.2.9}$$

(時間に関する並進対称性から, $S'_{\mathcal{A}}(x,y)$ は x^0-y^0 の関数であり, x^0 と y^0 に別々に依存する関数ではないことがわかる.) (14.2.6) から以下が導ける.

$$S'_{\mathcal{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E) = \sum_N \frac{U_N(\mathbf{x})\bar{U}_N(\mathbf{y})}{E'_N-E-i\epsilon} - \sum_N \frac{V_N(\mathbf{x})\bar{V}_N(\mathbf{y})}{E'_N+E-i\epsilon} . \tag{14.2.10}$$

特に, $S'_{\mathcal{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E)$ は電子のどの束縛エネルギーでも極を持ち, また, 陽電子の束縛エネルギーの符号を逆にした値でも極を持つ. (もちろ

ん, 陽電子は通常の正の電荷をもつ原子核のクーロン場では束縛状態を持たない.)

さて, 完全なプロパゲーターの最低次の輻射補正を考えよう. ファインマン則によれば, この次数の完全なプロパゲーターを $S'_{\mathcal{A}} = S_{\mathcal{A}} + \delta S_{\mathcal{A}}$ と書いて, その補正項は,

$$\delta S_{\mathcal{A}}(x,y) = \int d^4z \int d^4w \; S_{\mathcal{A}}(x,z)\,\Sigma^*_{\mathcal{A}}(z,w)\,S_{\mathcal{A}}(w,y) \qquad (14.2.11)$$

となる. ここで, $i\Sigma^*_{\mathcal{A}}$ は 1 電子が入り, 1 電子が出ていく全てのループ・ダイアグラム (から電子の外線を除いたもの) で, 電子の内線に $S(x-y)$ の代わりに $S_{\mathcal{A}}(x,y)$ を使い, さらに 2 次のくりこみ相殺項を入れたものの和だ. 時間変数の代わりにエネルギー変数を使うと, この式は,

$$\delta S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E) = \int d^3z \int d^3w \; S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x},\mathbf{z};E)\,\Sigma^*_{\mathcal{A}}(\mathbf{z},\mathbf{w};E)\,S_{\mathcal{A}}(\mathbf{w},\mathbf{y};E) \qquad (14.2.12)$$

となる. ここで, 以下を使った.

$$\Sigma^*_{\mathcal{A}}(\mathbf{z},\mathbf{w};E) \equiv \int dz^0\, e^{iE(z^0-w^0)}\Sigma^*_{\mathcal{A}}(z,w)\,. \qquad (14.2.13)$$

これらの輻射補正は波動関数を $U_N = u_N + \delta u_N$ と $V_N = v_N + \delta v_N$ に変え, 束縛状態のエネルギーを $E'_N = E_N + \delta E_N$ に変える. したがって, 完全なプロパゲーターは以下のようになる.

$$\begin{aligned} S'_{\mathcal{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E) \simeq S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E) &+ \sum_N \frac{\delta u_N(\mathbf{x})\bar{u}_N(\mathbf{y}) + u_N(\mathbf{x})\delta\bar{u}_N(\mathbf{y})}{E_N - E} \\ &- \sum_N \frac{\delta v_N(\mathbf{x})\bar{v}_N(\mathbf{y}) + v_N(\mathbf{x})\delta\bar{v}_N(\mathbf{y})}{E_N + E} \\ &- \sum_N \frac{u_N(\mathbf{x})\bar{u}_N(\mathbf{y})\delta E_N}{(E_N - E)^2} \\ &+ \sum_N \frac{v_N(\mathbf{x})\bar{v}_N(\mathbf{y})\delta E_N}{(E_N + E)^2}\,. \end{aligned} \qquad (14.2.14)$$

(ここで, E を連続散乱状態のエネルギーにとらないので $i\epsilon$ 項は落とした.) 電子の束縛状態のエネルギー・シフト δE_N は完全プロパゲーターの $-u_N(\mathbf{x})\bar{u}_N(\mathbf{y})/(E_N - E)^2$ の係数で与えられることがわかる. これを計算するには, (14.2.3) が以下のようになることを使う.

$$S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E) = \sum_N \frac{u_N(\mathbf{x})\bar{u}_N(\mathbf{y})}{E_N - E - i\epsilon} - \sum_N \frac{v_N(\mathbf{x})\bar{v}_N(\mathbf{y})}{E_N + E - i\epsilon}\,. \tag{14.2.15}$$

これを (14.2.12) に代入すると以下を得る.

$$\delta S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E) = \sum_{N,M} \frac{u_N(\mathbf{x})\bar{u}_M(\mathbf{y})}{(E_N - E)(E_M - E)} \times \int d^3z \int d^3w\, \bar{u}_N(\mathbf{z})\, \Sigma^*_{\mathcal{A}}(\mathbf{z},\mathbf{w};E)\, u_M(\mathbf{w}) + \cdots\,. \tag{14.2.16}$$

ここで, 「$\cdots$」は負エネルギーの極を一つ以上含む付加的な項を意味する. この式の $(E_N - E)^{-2}$ の係数と (14.2.14) の係数を比較して,

$$\delta E_N = -\int d^3x \int d^3y\; \bar{u}_N(\mathbf{x})\, \Sigma^*_{\mathcal{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E_N)\, u_N(\mathbf{y}) \tag{14.2.17}$$

を得る. u_N は斉次ディラック方程式の解であり, (14.1.8) の規格化条件を満たすから, これは通常の 1 次摂動論と非常に似ているが, ハミルトニアンの摂動項の代わりに $-\Sigma^*$ がある点で異なる.

一般的に δE_N は複素数となる. これは, 単に原子のエネルギー準位がより低い準位への放射崩壊のために不安定であることの結果だ. 3 章では, エネルギーが E で崩壊率が Γ の不安定状態では, 様々な振幅が複素エネルギー $E - i\Gamma/2$ で極を持つことを見た. したがって, (14.2.17) の虚数部は $-\Gamma/2$ に等しく, その実数部はエネルギー・シフトを与える.

Σ^* のファインマン・ダイアグラムは 14.1 図に示したものだ. (ここでは, 外場がローレンツ不変性と荷電共役不変性を破るので, 通常

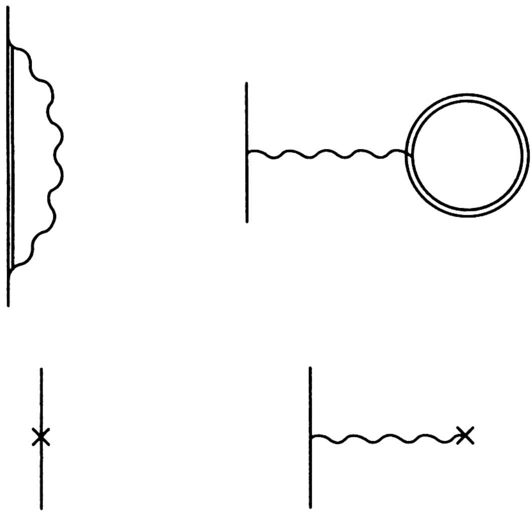


図 14.1: 外場のもとでの電子の自己エネルギー関数 $\Sigma^*_{\mathcal{A}}(x,y)$ の最低次のファインマン・ダイアグラム. ここで, 2 重の直線は外場の影響も含んだ電子のプロパゲーター $S_{\mathcal{A}}$, 1 重の直線は入ってくる電子と出て行く電子の線, 波線は仮想光子, ×はくりこみ相殺項を表す.

のファインマン則ではそれらの対称性で禁止されている光子のタッドポール項が新たに現れる.) これらのダイアグラムに座標空間のファインマン則を使うと, 以下を得る.

$$
\begin{aligned}
i\Sigma^*_{\mathcal{A}}(x,y) = {} & [e\gamma^\mu]\,[-iS_{\mathcal{A}}(x,y)]\,[e\gamma_\mu]\,[-iD(x-y)] \\
& - [e\gamma^\mu\delta^4(x-y)]\int d^4z\ [-iD(x-z)]\ \mathrm{Tr}\{[-iS_{\mathcal{A}}(z,z)]\,[e\gamma_\mu]\} \\
& -i(Z_2-1)(\gamma^\mu\partial_\mu+m)\delta^4(x-y)+i\delta m\,\delta^4(x-y) \\
& +e\gamma^\mu(Z_2-1)\delta^4(x-y)\mathcal{A}_\mu(x) \\
& +i(Z_3-1)[e\gamma_\mu]\delta^4(x-y)
\end{aligned}
$$

$$\times \int d^4z\ [-iD(x-z)]\,\partial_\nu(\partial^\nu \mathcal{A}^\mu(z) - \partial^\mu \mathcal{A}^\nu(z))\,. \qquad (14.2.18)$$

ここで, くりこみ定数 (Z_2-1), (Z_3-1), δm は e について 2 次まで求められたものだ. (第 2 項の負の符号は, フェルミオンの閉じたループに伴う通常の符号だ.)

$Z\alpha$ が 1 の大きさで外場が強いときには, 座標空間の電子のプロパゲーターと, (14.2.17) と (14.2.18) の積分を数値的に計算しなければならない.[4] しかし, 外場が弱いときには, (14.2.18) に級数 (14.2.1) の最初の数項を使ってこれらの積分を閉じた形で書ける. この目的のために, 以下の定義を使って運動量空間で計算を行う.

$$S_{\mathcal{A}}(x,y) = (2\pi)^{-4}\int d^4p'\,d^4p\; e^{ip'\cdot x}e^{-ip\cdot y}\,S_{\mathcal{A}}(p',p)\,, \qquad (14.2.19)$$

$$\Sigma^*_{\mathcal{A}}(x,y) = (2\pi)^{-4}\int d^4p'\,d^4p\; e^{ip'\cdot x}e^{-ip\cdot y}\,\Sigma^*_{\mathcal{A}}(p',p)\,, \qquad (14.2.20)$$

$$u_N(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3p\; e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}u_N(\mathbf{p})\,, \qquad (14.2.21)$$

$$\mathcal{A}^\mu(x) = \int d^4q\; e^{iq\cdot x}\mathcal{A}^\mu(q)\,. \qquad (14.2.22)$$

(ここでは, 多少不適切だが, 関数とそのフーリエ変換に同じ記号を使い, 関数の引数で区別することにしている.) このため, (14.2.1) は,

$$S_{\mathcal{A}}(p',p) = \frac{-i\not{p}+m}{p^2+m^2-i\epsilon} - ie\,\frac{-i\not{p}'+m}{p'^2+m^2-i\epsilon}\,\not{\mathcal{A}}(p'-p)\,\frac{-i\not{p}+m}{p^2+m^2-i\epsilon} + \cdots \qquad (14.2.23)$$

となる. また, (14.2.18) は以下のようになる.

$$\Sigma^*_{\mathcal{A}}(p',p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2-i\epsilon}\,\gamma^\mu S_{\mathcal{A}}(p'-k,p-k)\gamma_\mu$$
$$+\,[-(Z_2-1)(i\not{p}+m) + Z_2\delta m]\,\delta^4(p'-p) - ie(Z_2-1)\,\not{\mathcal{A}}(p'-p)$$

$$-\frac{ie^2\gamma^\mu}{(2\pi)^4}\frac{1}{(p-p')^2-i\epsilon}\int d^4q\ \mathrm{Tr}\left\{S_\mathcal{A}(q,q+p'-p)\gamma_\mu\right\}$$
$$+\frac{ie(Z_3-1)}{(p-p')^2-i\epsilon}\left[(p-p')^2\,\not{\mathcal{A}}(p'-p)-(\not{p}-\not{p}')\,(p-p')\cdot\mathcal{A}(p'-p)\right]\,. \tag{14.2.24}$$

外場は時間に依存しないので, $S_\mathcal{A}(x,y)$ と $\Sigma^*_\mathcal{A}(x,y)$ は差 x^0-y^0 のみを通じて x^0 と y^0 に依存する. したがって, $S_\mathcal{A}(p',p)$ と $\Sigma^*_\mathcal{A}(p',p)$ は $\mathcal{A}^\mu(p'-p)$ と同じく $\delta(p'^0-p^0)$ に比例しなければならない.

$$\mathcal{A}^\mu(p'-p)=\delta(p'^0-p^0)\mathcal{A}^\mu(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\,, \tag{14.2.25}$$

$$S_\mathcal{A}(p',p)=\delta(p'^0-p^0)S_\mathcal{A}(\mathbf{p}',\mathbf{p};p^0)\,, \tag{14.2.26}$$

$$\Sigma^*_\mathcal{A}(p',p)=\delta(p'^0-p^0)\Sigma^*_\mathcal{A}(\mathbf{p}',\mathbf{p};p^0)\,. \tag{14.2.27}$$

このため, エネルギー・シフトは (14.2.17) と (14.2.13) から以下のように決まる.

$$\delta E_N=-\int d^3p'\int d^3p\ \bar{u}_N(\mathbf{p}')\,\Sigma^*_\mathcal{A}(\mathbf{p}',\mathbf{p};E_N)\,u_N(\mathbf{p})\,. \tag{14.2.28}$$

ここで, $\Sigma^*_\mathcal{A}(\mathbf{p}',\mathbf{p};E_N)$ は (14.2.23), (14.2.24), (14.2.27) で決まる. これが主要な式であり, 次の節ではこれを使って, 弱い外場のもとでのエネルギー・シフトを計算する.

14.3　軽い原子でのラム・シフト

一般的な静電場のもとでの非相対論的電子のエネルギー準位に対する輻射補正を考える. この静電場の例としては $Z\alpha\ll 1$ の軽い原子核のクーロン場が考えられる. この極限では, クーロン場を弱い摂動と考えるのが自然だ. しかし, これは 11.3 節で見つけた赤外発散に関係したある種の赤外発散に導くことがわかる. この赤外発散は, 4 元

運動量 $\mathbf{p}, E_N$ と $\mathbf{p}', E_N$ が電子の質量殻上にないところで起こるので, 実際には偽物だ. しかし, 注意深く進むことを余儀なくされる.

この問題は通常, 仮想光子のエネルギー積分を, 低エネルギー領域と高エネルギー領域に分けて処理する. 低エネルギー領域では, 電子を非相対論的に扱えるが, 外場については全ての次数を取り入れなければならない. 高エネルギー領域では, 相対論的効果を取り入れなければならないが, 外場については最低次の効果を入れるだけでよい. ここでは, その代わりに光子に仮に質量 μ を導入する. この質量は, 電子の運動エネルギーの典型的な大きさよりずっと大きくとり, しかし, 電子の運動量の典型的な大きさよりはずっと小さくしておく. クーロン場については, これは,

$$(Z\alpha)^2 m_e \ll \mu \ll Z\alpha m_e \tag{14.3.1}$$

という条件に匹敵する. (14.2.24) の最初の 2 項の光子のプロパゲーター (相殺項 $Z_2 - 1$ と $Z_2\delta m$ の表式も含む) を以下の形に書く.

$$\frac{1}{k^2 - i\epsilon} = \left[\frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon}\right] + \left[\frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon}\right] . \tag{14.3.2}$$

これに対応して, エネルギー・シフトは「高エネルギー」項と「低エネルギー」項の二つの項の和となる. 高エネルギー項は (14.2.24) の最初の 3 項に光子プロパゲーター (14.3.2) の最初の項を使い, (14.2.24) の最後の 2 項 (真空偏極の項) の結果に加えたものだ. この真空偏極の項は赤外発散を含んでいない. 低エネルギー項は (14.2.24) の最初の 3 項に (14.3.2) の第 2 項を使って求められる. この方法の利点の一つは, 光子の質量を赤外切断に変換する微妙なことをせずに, 11.3 節と 11.4 節の相対論的な計算の結果を利用できることだ. もちろん, 最後に高エネルギー項と低エネルギー項の光子の質量 μ への依存性を調べて, それらのエネルギー・シフトへの寄与が打ち消し合い, 全エネルギー・シフトが μ に依存しないことを確認しなければならない.

A 高エネルギー項

光子の仮想質量 μ を原子の束縛エネルギーよりずっと大きくとるので, この場合は外場について最低次の項のみをとればよい. 一般的な時間に依存しない外場のベクトル・ポテンシャル $\mathcal{A}^\mu(\mathbf{x})$ のもとでの原子のエネルギー準位への 1 ループ輻射補正は運動量空間で, (14.2.28) で与えられる. ただし, 自己エネルギー項 $\Sigma_\mathcal{A}(p',p)$ は (14.2.24) と (14.2.23) で与えられる. 外場についてゼロ次の項は単に打ち消し合う. これは, δm の項は $\mathcal{A}=0$ のときの最初の項と打ち消し合い, Z_3-1 の項は $\mathcal{A}=0$ で第 3 項と打ち消し合う. そして, Z_2-1 の項は, $u(p)$ がディラック方程式を満たすためにゼロとなる. $\Sigma_\mathcal{A}(p',p)$ の中で $\mathcal{A}^\mu$ について 1 次の項を,

$$\Sigma_{\mathcal{A}1}(p',p) = -ie\mathcal{A}_\mu(p'-p)\,\Gamma_1^\mu(p',p) \tag{14.3.3}$$

と書くと,

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^\mu(p',p) = {} & \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2+\mu^2-i\epsilon} \\
& \times \left[\frac{-i(\not{p}'-\not{k})+m_e}{(p'-k)^2+m_e^2-i\epsilon}\right]\gamma^\mu\left[\frac{-i(\not{p}-\not{k})+m_e}{(p-k)^2+m_e^2-i\epsilon}\right] \\
& + (Z_2-1)\gamma^\mu \\
& - \frac{ie^2\gamma_\nu}{(2\pi)^4}\frac{1}{(p-p')^2-i\epsilon} \\
& \times \int d^4l\,\mathrm{Tr}\left\{\left[\frac{-i\not{l}+m_e}{l^2+m_e^2}\right]\gamma^\mu\left[\frac{-i\not{l}-i\not{p}'+i\not{p}+m_e}{(l+p'-p)^2+m_e^2}\right]\gamma^\nu\right\} \\
& - \frac{Z_3-1}{(p'-p)^2-i\epsilon}\left[(p-p')^2\eta_{\mu\nu}-(p'-p)_\mu(p'-p)_\nu\right]\gamma^\nu
\end{aligned} \tag{14.3.4}$$

となる. 最初の 2 項を (11.3.1) および (11.3.8) と比較し, 次の 2 項を (11.3.9), (11.2.3), (11.2.15) と比較すると, $\Gamma_1^\mu(p',p)$ は真空偏極と全ての相殺項を含む完全な 1 ループ頂点関数であることがわかる. この質量殻上の行列要素はすでに 11.3 節で計算した. (14.2.26) と (14.2.25)

を使うと, このエネルギー・シフト (14.2.28) への寄与は以下で与えられることがわかる.

$$[\delta E_N]_{\text{high energy}} = ie\int d^3p'\int d^3p\ \left(\bar{u}_N(\mathbf{p}')\,\Gamma_1^\mu(\mathbf{p}',E_N,\mathbf{p},E_N)\,u_N(\mathbf{p})\right) \times \mathcal{A}_\mu(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\,. \tag{14.3.5}$$

(これは, 外場と電子の相互作用で γ^μ を Γ_1^μ で置き換えれば, 予想できたことだ.) 14.1 節で論じたように, $Z\alpha \ll 1$ により (14.3.5) でディラック波動関数 u_N を以下のように近似できる.

$$[u_N(\mathbf{p})]_\alpha = \sum_\sigma u_\alpha(\mathbf{p},\sigma)\,[f_N(\mathbf{p})]_\sigma\,. \tag{14.3.6}$$

ここで, f_N はクーロン外場のなかの電子の非相対論的 2 成分波動関数, $u(\mathbf{p},\sigma)$ は運動量空間のディラック方程式,

$$[i\gamma_\mu p^\mu + m_e]\,u(\mathbf{p},\sigma) = 0 \tag{14.3.7}$$

を満たしスピンの z 成分が σ の規格化された 4 成分解だ. $u_N(\mathbf{p})$ は近似的に自由粒子のディラック方程式を満たすので, (10.6.15) より, Γ_1^μ の行列要素の一般的な形は, $q \equiv p' - p$ として以下のようになる.

$$\begin{aligned}&\bar{u}_M(\mathbf{p}')[\gamma^\mu + \Gamma_1^\mu(p',p)]u_N(\mathbf{p})\\&= \bar{u}_M(\mathbf{p}')\left[\gamma^\mu F_1(q^2) + \tfrac{1}{2}\,i\,[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,q_\nu F_2(q^2)\right]u_N(\mathbf{p})\,.\end{aligned} \tag{14.3.8}$$

波動関数 $u_N(\mathbf{p})$ は $|\mathbf{p}| \gg Z\alpha m_e$ で非常に早くゼロに近づくので, $|q^2| \ll m_e^2$ の極限での $F_1(\mathbf{q}^2)$ と $F_2(\mathbf{q}^2)$ のみが必要だ. この極限では, (11.3.31), (10.6.18), (11.3.16) から以下を得る.

$$F_1(q^2) \simeq 1 + \frac{e^2}{24\pi^2}\left(\frac{q^2}{m_e^2}\right)\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m_e^2}\right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right]\,, \tag{14.3.9}$$

$$F_2(q^2) \simeq \frac{e^2}{16m_e\pi^2}\,. \tag{14.3.10}$$

最初に (14.3.8) の F_1 項の寄与を考えよう．これはエネルギー・シフトに群を抜いた大きな寄与をし，またその計算ではもっとも興味ある問題が生じる．$\boldsymbol{\mathcal{A}}=0$ の純粋に静電場の場合には，(14.3.5), (14.3.8), (14.3.9) から以下を得る．

$$[\delta E_N]_{F_1} = -\frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2}\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m_e^2}\right)+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\right] \times \int d^3p' \int d^3p\ \bar{u}_N(\mathbf{p}')\Big(-ie\mathcal{A}^0(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\Big)\gamma^0(\mathbf{p}'-\mathbf{p})^2 u_N(\mathbf{p})\,. \tag{14.3.11}$$

非相対論的行列要素 (14.1.41) の主要項を使いこの寄与を計算すると以下を得る．

$$[\delta E_N]_{F_1} = -\frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2}\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m_e^2}\right)+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\right] \times \int d^3p' \int d^3p\ f_N^\dagger(\mathbf{p}')\,e\mathcal{A}^0(\mathbf{p}'-\mathbf{p})[\mathbf{p}'-\mathbf{p}]^2 f_N(\mathbf{p})\,. \tag{14.3.12}$$

これは座標空間では，

$$[\delta E_N]_{F_1} = \frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2}\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m_e^2}\right)+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\right] \times \int d^3x\ f_N^\dagger(\mathbf{x})\,[e\nabla^2\mathcal{A}^0(\mathbf{x})]f_N(\mathbf{x}) \tag{14.3.13}$$

となる．特に，(14.1.2) のクーロン・ポテンシャルでは，$e\nabla^2\mathcal{A}^0(\mathbf{x}) = -Ze^2\delta^3(\mathbf{x})$ であり，添字 N は主量子数 n と角運動量量子数 j, m, ℓ からなる．また，(11.2.41) から $[f_{njm\ell}(0)]_\sigma = 2(Z\alpha m_e/n)^{3/2}\delta_{\ell,0}\delta_{\sigma,m}/\sqrt{4\pi}$ を得る．これにより，(14.3.11) は，

$$[\delta E_{jn\ell}]_{F_1} = -\frac{2Z^4\alpha^5 m_e}{3\pi n^3}\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m_e^2}\right)+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\right]\delta_{\ell,0} \tag{14.3.14}$$

となる．(δE が全角運動量の z 成分 m に依存しないのは，回転不変性により保証されている．) (14.3.12) と (14.3.13) の括弧の中の $\frac{2}{5}$ の

項は真空偏極から生じ, 11.2 節で多少大雑把に導いたエネルギー・シフトを与える.

エネルギー・シフトに対する磁気的な寄与と低エネルギーの寄与を計算する前に, これまでに得た結果は, これ以上計算をしなくても, すでにラム・シフトの大きさの概算としてはよい値を与えていることを注意しておく. 低エネルギー項は $\ln(\mu/B)$ に比例する項を含み, その係数は (14.3.12) の μ 依存性を打ち消すようになっているはずだ. ここで, 定数 B は対数関数の引数を無次元にするように入っていなければならないエネルギーの次元を持つ量だ. ここでの計算では, 結果的に電子の原子による束縛エネルギーが赤外切断を与えるから, B は原子の束縛エネルギーの典型的な大きさであり, $B \simeq (Z\alpha)^2 m_e$ だと予想できる. したがって, 主量子数 n, 軌道角運動量 ℓ の状態 N の全エネルギー・シフトは, 以下の形となる.

$$\delta E_N = -\frac{2Z^4\alpha^5 m_e}{3\pi n^3}\left[\ln\left(Z^4\alpha^4\right)\delta_{\ell,0} + O(1)\right] . \tag{14.3.15}$$

水素原子の $2s$ 状態では, 対数項のみで以下を与える.

$$\delta E_{2s} \simeq -\frac{\alpha^5 m_e}{12\pi}\ln\left(\alpha^4\right) = 5.5\times 10^{-6}\ \mathrm{eV} = 1300\,\mathrm{MHz}\times 2\pi\hbar\,.$$

後で見るように, (14.3.15) の「O(1)」の項は全エネルギー・シフトを約 25% 下げる.

さて, Γ_1^μ の行列要素の F_2 の項の寄与を考えよう. これは 10.6 節で電子の磁気モーメントへの輻射補正と解釈できることを見た. (14.3.10), (14.3.8), (14.3.6) を (14.3.5) に使うと, この項が以下のエネルギー・シフトを与えることがわかる.

$$[\delta E_N]_{F_2} = -\frac{e^2}{32\pi^2 m_e}\int d^3p'\int d^3p\ \left(\bar{u}_N(\mathbf{p}')\,[\gamma^\mu,\gamma^\nu]u_N(\mathbf{p})\right) \times e\mathcal{A}_\mu(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\,(p'-p)_\nu\,. \tag{14.3.16}$$

これは座標空間では, 以下となる.

$$[\delta E_N]_{F_2} = \frac{ie^2}{64\pi^2 m_e}\int d^3x\ (\bar{u}_N(\mathbf{x})\,[\gamma^\mu,\gamma^\nu]u_N(\mathbf{x}))\,e\mathcal{F}_{\mu\nu}(\mathbf{x})\ . \quad (14.3.17)$$

ここで,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \equiv \partial_\mu \mathcal{A}_\nu(\mathbf{x}) - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu(\mathbf{x}) \quad (14.3.18)$$

を使った. $\boldsymbol{\mathcal{A}} = 0$ の純粋に静電的な場では, これは,

$$[\delta E_N]_{F_2} = \frac{-ie^2}{32\pi^2 m_e}\int d^3x\ \left(\bar{u}_N(\mathbf{x})\,[\boldsymbol{\gamma},\gamma^0]u_N(\mathbf{x})\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}[e\mathcal{A}^0(\mathbf{x})] \quad (14.3.19)$$

となる. 非相対論的極限 $Z\alpha \ll 1$ では, (14.1.43) の近似的な結果を使え, 以下のようになる.

$$\begin{aligned}(\bar{u}_N[\gamma^0,\boldsymbol{\gamma}]u_N) &\simeq \frac{i}{m_e}[(\boldsymbol{\nabla} f_N^\dagger\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{\sigma} f_N) + (f_N^\dagger\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\, f_N)] \\ &= \frac{i}{m_e}[\boldsymbol{\nabla}(f_N^\dagger f_N) - i(\boldsymbol{\nabla} f_N^\dagger\times\boldsymbol{\sigma})f_N - if_N^\dagger(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\nabla} f_N)]\ .\end{aligned} \quad (14.3.20)$$

これを (14.3.8) に使い, 部分積分をすると, この部分のエネルギー・シフトを以下のように得る.

$$\begin{aligned}[\delta E_N]_{F_2} = \frac{e^2}{32\pi^2 m_e^2}\int d^3x \Big[&-|f_N(\mathbf{x})|^2\nabla^2(e\mathcal{A}^0(\mathbf{x})) \\ &+2i\, f_N^\dagger(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\nabla}(e\mathcal{A}^0(\mathbf{x}))\times\boldsymbol{\nabla} f_N(\mathbf{x}))\Big]\ . \end{aligned}\quad (14.3.21)$$

(14.3.12) と (14.3.21) を合わせると, 任意の静電ポテンシャル $\mathcal{A}^0$ でのエネルギー・シフトへの高エネルギーの寄与の全体が以下のようになる.

$$\begin{aligned}[\delta E_N]_{\text{high energy}} = {}& \\ &\frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2}\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m_e^2}\right) + \frac{2}{5}\right]\int d^3x\ f_N^\dagger(\mathbf{x})\,[e\nabla^2\mathcal{A}^0(\mathbf{x})]f_N(\mathbf{x}) \\ &+\frac{ie^2}{16\pi^2 m_e^2}\int d^3x\ \ f_N^\dagger(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\nabla}(e\mathcal{A}^0(\mathbf{x}))\times\boldsymbol{\nabla} f_N(\mathbf{x}))\ .\end{aligned} \quad (14.3.22)$$

B 低エネルギー項

エネルギー・シフトへの低エネルギーの寄与は (14.2.24) の最初の3項で光子のプロパゲーターを以下で置き換えて得られる.

$$\frac{1}{k^2 - i\epsilon} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} . \tag{14.3.23}$$

この置き換えで, 光子の4元運動量 k の成分についての積分が μ の大きさで切断される. しかし, 質量のくりこみを注意深く行うまではこれはわからないので, それまで非相対論的な近似はせずにおく. また, ここでは光子について, 原子状態の束縛エネルギー程度かそれより小さい運動量も含んでいるので, この束縛状態を実現している静電ポテンシャルは全ての次数で取り込まなければならない.

(14.2.24) の運動量空間の表式を使う代わりに, (14.2.18) の座標空間の表式に戻る方が便利だ. これにより, 電子の自己エネルギー関数への低エネルギーの寄与が,

$$\begin{aligned} [\Sigma^*_{\mathcal{A}}(x,y)]_{\text{low energy}} &= ie^2\gamma^\rho\, S_{\mathcal{A}}(x,y)\,\gamma_\rho\, D(x-y;\mu) + \delta m_e(\mu)\,\delta^4(x-y) \\ &\quad -(Z_2(\mu)-1)(\gamma^\mu[\partial_\mu + ie\mathcal{A}_\mu] + m_e)\delta^4(x-y) \end{aligned} \tag{14.3.24}$$

となる. ここで, $D(x-y;\mu)$ は以下の変更された光子のプロパゲーターだ.

$$D(x-y;\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\; e^{ik\cdot(x-y)}\left[\frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2+\mu^2 - i\epsilon}\right] . \tag{14.3.25}$$

また, 相殺項 $Z_2(\mu)-1$ と $\delta m(\mu)$ はこの変更されたプロパゲーターを使って計算されたものだ. 時間をエネルギー変数に換算すると, (14.2.13) への低エネルギーの寄与は, 以下となる.

$$[\Sigma^*_{\mathcal{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E)]_{\text{low energy}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k\, \gamma^\rho\, S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E - k^0)\, \gamma_\rho \\
&\qquad\qquad \times \left[\frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon}\right] e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\
&\quad -(Z_2(\mu) - 1)\left(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + i\gamma^0 E + ie\gamma^\nu \mathcal{A}_\nu + m_e\right)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&\quad +\delta m_e(\mu)\,\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\,. \qquad (14.3.26)
\end{aligned}
$$

このため, エネルギー・シフトへの低エネルギーの寄与は (14.2.17) より, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
[\delta E_N]_{\text{low energy}} &= -\int d^3x \int d^3y\, \bar{u}_N(\mathbf{x})\, [\Sigma^*_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E_N)]_{\text{low energy}}\, u_N(\mathbf{y}) \\
&= \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \int d^3x \int d^3y\, \bar{u}_N(\mathbf{x})\, \gamma^\rho\, S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E_N - k^0)\, \gamma_\rho\, u_N(\mathbf{y}) \\
&\qquad \times \left[\frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon}\right] e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\
&\quad -\delta m_e(\mu) \int d^3x\, \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x})\,. \qquad (14.3.27)
\end{aligned}
$$

$Z_2(\mu) - 1$ に比例する項は, ディラックの波動関数 $u_N(\mathbf{x})$ がディラック方程式 (14.1.10) を満たすために落とし, クーロン場のもとでの電子のプロパゲーターには (14.2.15) を使う.

$$
S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) = \sum_M \frac{u_M(\mathbf{x})\bar{u}_M(\mathbf{y})}{E_M - E - i\epsilon} - \sum_M \frac{v_M(\mathbf{x})\bar{v}_M(\mathbf{y})}{E_M + E - i\epsilon}\,.
$$

ここで, 第 1 項と第 2 項にある和は, それぞれ, 1 電子と 1 陽電子の状態についての和だ. k^0 積分は, 第 1 項では積分経路を下半面での大きな半円で閉じ, 第 2 項では, 上半面の大きな半円で閉じることで簡単に計算できる.

$$
\begin{aligned}
&\int dk^0 \left(\frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon}\right)\left(\frac{1}{E_M \mp E_N \pm k^0 - i\epsilon}\right) \\
&\qquad = \frac{i\pi}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}} \left(\frac{1}{E_M \mp E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon}\right)\,.
\end{aligned}
$$

また, μ がゼロに置き換わっても同様だ. こうすると, (14.3.27) のエネルギー・シフトは以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
[\delta E_N]_{\text{low energy}} = & -\frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int d^3k \sum_M \\
& \times \Bigg[\Gamma^\rho_{MN}(\mathbf{k})^*\Gamma_{\rho MN}(\mathbf{k})\Bigg(\frac{1}{|\mathbf{k}|(E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} \\
& \qquad - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}(E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2} - i\epsilon)}\Bigg) \\
& \quad -\tilde{\Gamma}^\rho_{MN}(\mathbf{k})^*\tilde{\Gamma}_{\rho MN}(\mathbf{k})\Bigg(\frac{1}{|\mathbf{k}|(E_M + E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} \\
& \qquad - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}(E_M + E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2} - i\epsilon)}\Bigg)\Bigg] \\
& -\delta m_e(\mu)\int d^3x\ \bar{u}_N(\mathbf{x})u_N(\mathbf{x})\ . \qquad (14.3.28)
\end{aligned}
$$

ここで, 次の表式を使った.

$$
\Gamma^\rho_{MN}(\mathbf{k}) \equiv \int d^3y\ e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}\ \bar{u}_M(\mathbf{y})\gamma^\rho u_N(\mathbf{y})\ , \qquad (14.3.29)
$$

$$
\tilde{\Gamma}^\rho_{MN}(\mathbf{k}) \equiv \int d^3y\ e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}\ \bar{v}_M(\mathbf{y})\gamma^\rho u_N(\mathbf{y})\ . \qquad (14.3.30)
$$

(もちろん, (14.3.28) での M についての「和」は第 1 項では電子状態のみを含み, 第 2 項では陽電子状態のみを含む.) (14.3.28) は旧式の摂動論を使っていれば, 直接的に導けた. つまり, エネルギー分母 $E_M - E_N + \omega$ はエネルギー E_M の電子とエネルギー ω の光子からなる中間状態から始状態のエネルギー E_N を引いたものだ. また, $E_M + E_N + \omega$ は, エネルギー E_M の陽電子, エネルギー ω の光子, 始状態と終状態の電子を共に含んだ中間状態のエネルギーから, 始状態のエネルギー E_N を引いたものだ. (14.2 図を見よ.)

(14.3.28) に近似をする前に, 電流の保存則から導かれる以下の関係式を使って, 行列要素 Γ^ρ_{MN} と $\tilde{\Gamma}^\rho_{MN}$ の時間成分を対応する空間成分

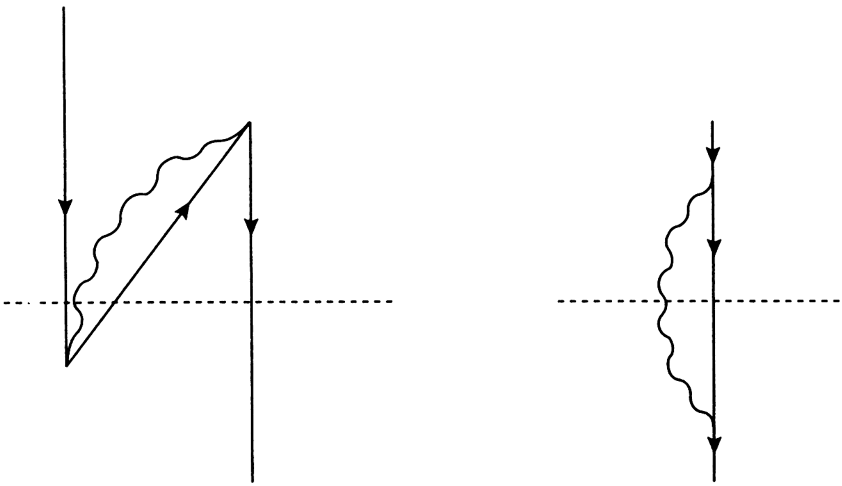


図 14.2: 電子のエネルギー・シフトの低エネルギー部分に寄与する旧式の摂動論のダイアグラム. ここで, 直線は電子, 波線は光子を表す. 破線が切っている粒子の線は (14.3.28) の最初の 2 項に現れる中間状態に対応する.

で表しておくと便利だ.*

$$k_i \, \Gamma^i_{MN}(\mathbf{k}) = (E_N - E_M)\Gamma^0_{MN}(\mathbf{k}) \,, \tag{14.3.31}$$

$$k_i \, \tilde{\Gamma}^i_{MN}(\mathbf{k}) = (E_N + E_M)\tilde{\Gamma}^0_{MN}(\mathbf{k}) \,. \tag{14.3.32}$$

---

*(14.3.31) を導くには,

$$\begin{aligned} k_i\Gamma^i_{MN}(\mathbf{k}) &= -i \int d^3x \, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \, \nabla\cdot\left(\bar{u}_M(\mathbf{x})\gamma u_N(\mathbf{x})\right) \\ &= i \int d^3x \, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \, \partial_0 \left[\left(\bar{u}_M(\mathbf{x})\gamma^0 u_N(\mathbf{x})\right) \, e^{-i(E_N - E_M)x^0} \right]_{x^0=0} \\ &= (E_N - E_M)\Gamma^0_{MN}(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

を使う. (14.3.32) も同様に得られる.

さらに, (14.1.8) の完全性条件を使い, 次の式を示せる.

$$\sum_M \left[|\Gamma^0_{MN}(\mathbf{k})|^2 + |\tilde{\Gamma}^0_{MN}(\mathbf{k})|^2\right] = 1\ . \qquad (14.3.33)$$

また, 以下も同様だ.

$$\begin{aligned}&\sum_M \left[|\Gamma^0_{MN}(\mathbf{k})|^2(E_M - E_N) - |\tilde{\Gamma}^0_{MN}(\mathbf{k})|^2(E_M + E_N)\right]\\ &= \sum_M \left[-\Gamma^{0*}_{MN}(\mathbf{k})\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k}) - \tilde{\Gamma}^{0*}_{MN}(\mathbf{k})\ \mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{MN}(\mathbf{k})\right]\\ &= -i\mathbf{k}\cdot\int d^3x\ \bar{u}_N(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\gamma} u_N(\mathbf{x}) = 0\ . \qquad (14.3.34)\end{aligned}$$

最後の段階ではパリティ条件 (14.1.23) を使った. このようにして, (14.3.28) は以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned}&[\delta E_N]_{\text{low energy}}\\ &= -\frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int d^3k\ \sum_M \left[\frac{\left(|\mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2/\mathbf{k}^2\right)}{|\mathbf{k}|\ (E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)}\right.\\ &\qquad\left. - \frac{\left(|\mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2/(\mathbf{k}^2+\mu^2)\right)}{\sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}\ (E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2} - i\epsilon)}\right]\\ &+\frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int d^3k\ \sum_M \left[\frac{\left(|\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{MN}(\mathbf{k})|^2/\mathbf{k}^2\right)}{|\mathbf{k}|\ (E_M + E_N + |\mathbf{k}|)}\right.\\ &\qquad\left. - \frac{\left(|\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{MN}(\mathbf{k})|^2/(\mathbf{k}^2+\mu^2)\right)}{\sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}\ (E_M + E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2})}\right]\\ &-\frac{e^2}{(2\pi)^3}\int d^3k\ \sum_M |\tilde{\Gamma}^0_{MN}(\mathbf{k})|^2\ \left(\frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2+\mu^2}\right)\\ &+\tfrac{1}{2}\,\alpha\mu - \delta m_e(\mu)\int d^3x\ \bar{u}_N(\mathbf{x})u_N(\mathbf{x})\ . \qquad (14.3.35)\end{aligned}$$

最後から 2 番目の項では, 初等的な積分,

$$\int d^3k\ \left(\frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2+\mu^2}\right) = 2\mu\pi^2$$

を使った.

ここまでは, (14.3.28) を厳密に書き換えてきた. ここで, 幾つかの近似を導入する. まず, 質量のくりこみを考える. すでに 11.4 節で $\delta m_e(\mu)$ を α の次数まで計算した. それは,

$$\delta m_e(\mu) = \frac{2m_e\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\,[1+x]\,\ln\left(\frac{m_e^2x^2+\mu^2(1-x)}{m_e^2x^2}\right) \quad (14.3.36)$$

となった. 11.4 節では μ を m_e よりずっと大きい正則化のための質量と見なしたが, (14.3.36) はここで興味のある $\mu \ll m_e$ についても $\delta m_e(\mu)$ の値を決めるのに使える. この極限では (14.3.36) は,

$$\delta m_e(\mu) \to \frac{\alpha\mu}{2}\left[1-\frac{3\mu}{2\pi m_e}+\ldots\right] \quad (14.3.37)$$

となる. また, $Z\alpha \ll 1$ では, $u_N(\mathbf{x})$ は (14.1.37) により以下のように与えられる.

$$u_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}(1-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}/2+\cdots)f_N(\mathbf{x})\\(1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}/2+\cdots)f_N(\mathbf{x})\end{bmatrix}. \quad (14.3.38)$$

ここで, 「$\cdots$」は $Z\alpha$ について高い次数の項を意味する. また, $\mathbf{v}$ は非相対論的速度演算子 $-i\boldsymbol{\nabla}/m_e$ であり, $f_N(\mathbf{x})$ は非相対論的シュレーディンガー方程式の 2 成分スピノル解で, (14.1.38) にしたがって規格化されていて,

$$\int |f_N(\mathbf{x})|^2 = 1-\tfrac{1}{4}\,(\mathbf{v}^2)_{NN}+\cdots \quad (14.3.39)$$

となっている. これにより, (14.3.35) の $\delta m_e(\mu)$ の係数は, 次のようになる.

$$\int d^3x\;\bar{u}_N(\mathbf{x})u_N(\mathbf{x}) = 1-\tfrac{1}{2}\,(\mathbf{v}^2)_{NN}+\cdots\,. \quad (14.3.40)$$

$-\delta m_e(\mu)\int d^3x\,\bar{u}_N u_N$ の主要項が (14.3.35) の $\alpha\mu/2$ 項を打ち消すことはすぐに分かる. 実際, この打消しは予期することができた. なぜ

なら, (14.3.35) の $\alpha\mu/2$ の項は $Z\alpha \to 0$ の極限で生き残るし, $m_e(\mu)$ が電子のくりこまれた質量として定義されていることから, この極限ではエネルギー・シフトへの寄与は無いことがわかる. 同じ理由で, $\delta m_e(\mu)$ の $\alpha\mu^2/m_e$ の大きさの項 (これは, $\alpha(Z\alpha)^4 m_e$ よりも大きく, 単純に無視はできない) がこれと同じ大きさの (14.3.35) の第 2 項と第 3 項を打ち消すと予期できる.** 一方, δm_e の中の $\alpha\mu^2/m_e$ の項と行列要素 (14.3.40) の第 2 項との積は $(Z\alpha)^2\alpha\mu^2/m_e \ll \alpha(Z\alpha)^4 m_e$ の大きさであり, したがって無視できる. $\alpha(Z\alpha)^4 m_e$ の次数では, 唯一残った質量のくりこみの影響は $\delta m_e(\mu)$ の主要項と $\int d^3x\, \bar{u}_N u_N$ の中

**この打消しは以下のように示せる. (14.3.35) の第 2 項と第 3 項は充分小さく, $u_N(\mathbf{x})$ が満たすディラック方程式で極端に非相対論的な近似 $\beta u_N(\mathbf{x}) = u_N(\mathbf{x})$ を使ってそれらの項が計算できると期待できる. 一方, クーロン力は陽電子の波動関数 $v_M(\mathbf{x})$ では無視できるが, 第 3 項の M に関する和では相対論的陽電子から重要な寄与があり, $v_{\mathbf{p},\sigma}(\mathbf{x}) \simeq (2\pi)^{-3/2} v(\mathbf{p},\sigma) e^{ip\cdot x}$ という近似を使う. ここで, $v(\mathbf{p},\sigma)$ は 5.5 節で導入した陽電子のスピノルであり, $\bar{v}(\mathbf{p},\sigma')v(\mathbf{p},\sigma) = \delta_{\sigma',\sigma}$ と規格化されている. したがって, (14.3.35) の第 2 項と第 3 項の M に関する和は近似的に以下で与えられる.

$$\tfrac{1}{2}\left[\sum_M \tilde{\Gamma}^{i*}_{MN}(\mathbf{k})\tilde{\Gamma}^{j}_{MN}(\mathbf{k}) + (i \leftrightarrow j)\right] \simeq \delta_{ij}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2+m_e^2}+m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2+m_e^2}}\right),$$

$$\sum_M |\tilde{\Gamma}^0_{MN}(\mathbf{k})|^2 \simeq \left(\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2+m_e^2}-m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2+m_e^2}}\right).$$

したがって, (14.3.35) の第 2 項と第 3 項で μ/m_e の冪で主要な項は, それぞれ,

$$\frac{e^2}{4m_e(2\pi)^3}\int d^3k\left[\frac{2}{k} - \frac{(3-k^2/(k^2+\mu^2))}{\sqrt{k^2+\mu^2}}\right]\left(\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2+m_e^2}+m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2+m_e^2}}\right) \simeq \frac{\alpha\mu^2}{4\pi m_e}$$

と

$$-\frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int d^3k\left(\frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2+\mu^2}\right)\left(\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2+m_e^2}-m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2+m_e^2}}\right) \simeq -\frac{\alpha\mu^2}{\pi m_e}$$

になる. ((14.3.32) より, 後者の表式への相対論的補正が $|\mathbf{k}|^2 \ll m_e^2$ のときにこの表式に現れる $\mathbf{k}^2/m_e^2$ の因子で抑えられないかもしれないという可能性が排除される.) これらの 2 項は $-\delta m_e(\mu)\int d^3x\bar{u}_N(\mathbf{x})u_N(\mathbf{x})$ の中の $+3\alpha\mu^2/4\pi m_e$ の項で打ち消される. 最後に, 上での陽電子状態の和の計算への相対論的補正は, $v^2/c^2 \approx (Z\alpha)^2$ の因子を余分に含み, $\alpha(Z\alpha)^2\mu^2/m_e \ll \alpha(Z\alpha)^4 m_e$ の大きさの寄与をし, このため, ここで使った非相対論的近似が正当化されることに注意しておく.

の $(Z\alpha)^2$ の次数の項の積だ.

$$-\left[\frac{e^2\mu}{8\pi}\right]\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{v}^2)_{NN}\right]=\frac{e^2\mu}{16\pi}(\mathbf{v}^2)_{NN}\ .$$

(これは, 1.3 節で触れた電子の運動エネルギーへの質量のくりこみの効果だ.) これは, エネルギー準位の差を無視したときの (14.3.35) の第 1 項の符号を変えたものにちょうど等しい. これを見るには, この項の積分は実際には $|\mathbf{k}|\sim\mu\ll Z\alpha m_e$ で切断されていて, 行列要素 $\mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})$ は $\mathbf{k}\to 0$ の極限で計算できることに注意する. $Z\alpha$ について最低次では, (14.1.42) は,

$$\mathbf{\Gamma}_{MN}(0)=(\mathbf{v})_{MN} \tag{14.3.41}$$

となり, 非相対論的シュレーディンガー方程式の解 f_N の完全性を使うと,

$$\sum_M \Gamma^{i*}_{MN}(\mathbf{k})\Gamma^{j}_{MN}(\mathbf{k})\simeq(v^i\,v^j)_{NN} \tag{14.3.42}$$

となる. したがって, この次数では, 以下を得る.

$$\begin{aligned}
&-\frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int d^3k\sum_M\left[\frac{\left(|\mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2-|\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2/\mathbf{k}^2\right)}{\mathbf{k}^2}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\left(|\mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2-|\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2/(\mathbf{k}^2+\mu^2)\right)}{\mathbf{k}^2+\mu^2}\right]\\
&\simeq-\frac{e^2}{2(2\pi)^3}(\mathbf{v}^2)_{NN}\int d^3k\left[\frac{2}{3\mathbf{k}^2}-\frac{\left(1-\mathbf{k}^2/3(\mathbf{k}^2+\mu^2)\right)}{\mathbf{k}^2+\mu^2}\right]\\
&=-\frac{e^2\mu}{16\pi}(\mathbf{v}^2)_{NN}\ .
\end{aligned}$$

このように, 質量のくりこみを行った後では, (14.3.35) の第 1 項から, それからエネルギー差 E_N-E_M を落とした項を引いたものだけが

残る.

$$[\delta E_N]_{\text{low energy}} = \frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int d^3k \sum_M (E_M - E_N)$$
$$\times \left[\frac{\left(|\mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2/\mathbf{k}^2\right)}{\mathbf{k}^2(E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)}\right.$$
$$\left. - \frac{\left(|\mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2/(\mathbf{k}^2+\mu^2)\right)}{(\mathbf{k}^2+\mu^2)(E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2} - i\epsilon)}\right] . \tag{14.3.43}$$

(14.3.41) を再び使うと, これは,

$$[\delta E_N]_{\text{low energy}} = \frac{e^2}{2(2\pi)^3}\sum_M (E_M - E_N)|\mathbf{v}_{MN}|^2$$
$$\times \int d^3k \left[\frac{2}{3\mathbf{k}^2(E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)}\right.$$
$$\left. - \frac{1 - \mathbf{k}^2/3(\mathbf{k}^2+\mu^2)}{(\mathbf{k}^2+\mu^2)(E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2} - i\epsilon)}\right] \tag{14.3.44}$$

となる. 電子の運動量の典型的な大きさは, 原子のエネルギー準位の差の典型的な大きさよりずっと大きいが, これは, この積分の $|\mathbf{k}|$ の典型的な大きさについては正しくない. なぜなら, この積分は, もし分母の $E_M - E_N$ を落とせば赤外発散するからだ. (14.3.44) の積分は $\mu \gg |E_M - E_N| \sim (Z\alpha)^2 m_e$ の極限では, λ を $|E_M - E_N| \ll \lambda \ll \mu$ を満たす任意の量として, $|\mathbf{k}|$ 積分をゼロから λ までの領域と λ から無限大の領域の二つに分けて計算できる. このようにすると, 以下を得る.

$$\int_0^\infty k^2 dk \left[\frac{2}{3k^2(E_M - E_N + k) - i\epsilon}\right.$$
$$\left. - \frac{1 - k^2/3(k^2+\mu^2)}{(k^2+\mu^2)(E_M - E_N + \sqrt{k^2+\mu^2} - i\epsilon)}\right]$$

$$\simeq \frac{2}{3}\left[\ln\left(\frac{\mu}{2|E_M - E_N|}\right) + \frac{5}{6} + i\pi\theta(E_N - E_M)\right] .$$

この虚数部は, N 状態にある原子が, より低いエネルギーの M 状態へ崩壊する可能性を反映している. この項はエネルギー・シフトの虚数部で与えられる崩壊率に寄与する. ここでは, エネルギー・シフトの実部に興味があるので, 以下ではこの虚数部を落とす. こうして (14.3.44) は以下のようになる.

$$[\delta E_N]_{\text{low energy}} = \frac{e^2}{6\pi^2}\sum_M (E_M - E_N)|\mathbf{v}_{MN}|^2 \left[\ln\left(\frac{\mu}{2|E_N - E_M|}\right) + \frac{5}{6}\right] . \tag{14.3.45}$$

C　全エネルギー・シフト

(14.3.45) の和と高エネルギー項 (14.3.22) の行列要素との関係をつけなければならない. この目的のために, まず最初に, もし対数を無視したら (14.3.45) の和はどのような値になるかを見る. $(E_M - E_N)\mathbf{v}_{NM} = [\mathbf{v}, H]_{NM}$ が成立するから,

$$\sum_M (E_M - E_N)|\mathbf{v}_{MN}|^2 = \tfrac{1}{2}\sum_M \left([v^i, H]_{NM}\, v^i_{MN} + v^i_{NM}\,[H, v^i]_{MN}\right)$$
$$= -\frac{1}{2m_e^2}\left([p^i, [p^i, H]]\right)_{NN}$$

となる. 非相対論的ハミルトニアン H で運動量演算子 $\mathbf{p}$ と可換でない唯一の項は, ポテンシャル項 $-e\mathcal{A}^0(\mathbf{x})$ だ. したがって, これより,

$$\sum_M (E_M - E_N)|\mathbf{v}_{MN}|^2 = -\frac{e}{2m_e^2}\left(\nabla^2\mathcal{A}^0(\mathbf{x})\right)_{NN} \tag{14.3.46}$$

となる. (14.3.45) と (14.3.22) を見ると, 高エネルギー項の $\ln\mu$ に比例する項は低エネルギー項の $\ln\mu$ に比例する項で打ち消されること

がわかる.

$$\delta E_N = [\delta E_N]_{\text{high energy}} + [\delta E_N]_{\text{low energy}}$$
$$= \frac{e^2}{6\pi^2}\sum_M (E_M - E_N)|\mathbf{v}_{MN}|^2 \left[\ln\left(\frac{m_e}{2|E_N - E_M|}\right) + \frac{5}{6} - \frac{1}{5}\right]$$
$$-\frac{e^2}{16\pi^2 m_e^2}\Big(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}(e\mathcal{A}^0(\mathbf{x}))\times\mathbf{p}\Big)_{NN}. \qquad (14.3.47)$$

これまでは, 一般的な静電場 $\mathcal{A}^0(\mathbf{x})$ について述べてきた. ここで, 純粋なクーロン場,

$$\mathcal{A}^0(\mathbf{x}) = Ze/|\mathbf{x}| \qquad (14.3.48)$$

に話を限ろう. この場合は, (14.3.46) は,

$$\sum_M (E_M - E_N)|\mathbf{v}_{MN}|^2 = \frac{Ze^2}{2m_e^2}\left(\delta^3(\mathbf{x})\right)_{NN} = \frac{Ze^2}{2m_e^2}\Big(f_N^\dagger(0)f_N(0)\Big) \qquad (14.3.49)$$

となる. これは $\ell = 0$ のときにのみゼロでない. また, (14.3.47) の最後の項の行列要素は以下の値をとる.

$$\Big(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}(e\mathcal{A}^0(\mathbf{x}))\times\mathbf{p}\Big)_{NN} = -Ze\Big(\frac{1}{r^3}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L}\Big)_{NN}. \qquad (14.3.50)$$

これは $\ell \neq 0$ のときにのみゼロでない. したがって, ここで便利なように, $\ell = 0$ と $\ell \neq 0$ の二つの場合を別々に考慮する.

i. $\ell = 0$

ここで, 平均励起エネルギー ΔE_N を以下のように定義すると便利だ.

$$\sum_M |\mathbf{v}_{MN}|^2 (E_M - E_N) \ln|E_N - E_M|$$
$$\equiv \ln\Delta E_N \sum_M |\mathbf{v}_{MN}|^2 (E_M - E_N)$$
$$= \frac{Ze^2}{2m_e^2}\ln\Delta E_N \Big(f_N^\dagger(0)f_N(0)\Big). \qquad (14.3.51)$$

水素原子の s 波状態では, 添字 N は主量子数 n, スピンの z 成分 m からなり, $[f_{nm}(0)]_\sigma = 2(Z\alpha m_e/n)^{3/2}\delta_{\sigma,m}/\sqrt{4\pi}$ だから,

$$\left(f_N^\dagger(0) f_N(0)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{Z\alpha m_e}{n}\right)^3 \tag{14.3.52}$$

となる. (14.3.47) で (14.3.51) と (14.3.52) を使うと, これらの状態のエネルギー・シフトが, 以下のようになる.

$$[\delta E]_{n,\ell=0} = \frac{4\alpha(Z\alpha)^4 m_e}{3\pi n^3}\left[\ln\left(\frac{m_e}{2\Delta E_{n,\ell=0}}\right) + \frac{19}{30}\right] . \tag{14.3.53}$$

ii.　$\ell \neq 0$

軌道角運動量がゼロでないときは, (14.3.49) の和がゼロとなるので, (14.3.51) の定義は適切でない. その代わりに, 平均励起エネルギー ΔE_N を次で定義するのがよい.

$$\sum_M (E_M - E_N)|\mathbf{v}_{MN}|^2 \ln|E_N - E_M| \equiv \frac{2(Z\alpha)^4 m_e}{n^3}\ln\left(\frac{2\Delta E_N}{Z^2\alpha^2 m_e}\right) . \tag{14.3.54}$$

((14.3.49) はゼロとなるので, (14.3.54) で $E_N - E_M$ を計るのにどのような単位を用いたかは何ら影響しない.) また, 全角運動量 j で, 軌道角運動量 ℓ の状態では, スカラー積 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L}$ はよく知られた値, $j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}$ を持ち, 主量子数が n のとき演算子 $1/r^3$ は次の期待値を持つ.

$$\int d^3r |f_N|^2/r^3 = \frac{2Z^3\alpha^3 m_e^3}{n^3\ell(\ell+1)(2\ell+1)} . \tag{14.3.55}$$

これらを全て (14.3.47) で合わせると, $\ell \neq 0$ では以下を得る.

$$[\delta E]_{jn\ell} = -\frac{4\alpha(Z\alpha)^4 m_e}{3\pi n^3}\ln\left(\frac{2\Delta E_{jn\ell}}{Z^2\alpha^2 m_e}\right) + \frac{\alpha(Z\alpha)^4 m_e}{2\pi n^3}\left[\frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}}{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}\right] . \tag{14.3.56}$$

あとは, これらの結果を使ってエネルギー・シフトの数値を決めるだけだ. 平均励起エネルギーは, 非相対論的な水素の波動関数を使って数値的に計算しなければならない. その結果は以下となる.[5]

$$\Delta E_{1s} = 19.769266917(6)\ \mathrm{Ry}\ ,$$

$$\Delta E_{2s} = 16.63934203(1)\ \mathrm{Ry}\ ,$$

$$\Delta E_{2p} = 0.9704293186(3)\ \mathrm{Ry}\ .$$

ここで, $1\ \mathrm{Ry} \equiv m_e\alpha^2/2 = 13.6057\ \mathrm{eV}$ だ. これより, (14.3.53) から,

$$\begin{aligned}[\delta E]_{1s} &= \frac{4\alpha^5 m_e}{3\pi}\left[\ln\left(\frac{m_e}{2\Delta E_{1s}}\right) + \frac{19}{30}\right] = 3.3612 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV} \\ &= 2\pi\hbar\ \times\ 8127.4\ \mathrm{MHz}\ ,\end{aligned} \tag{14.3.57}$$

$$\begin{aligned}[\delta E]_{2s} &= \frac{\alpha^5 m_e}{6\pi}\left[\ln\left(\frac{m_e}{2\Delta E_{2s}}\right) + \frac{19}{30}\right] = 4.2982 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV} \\ &= 2\pi\hbar\ \times\ 1039.31\ \mathrm{MHz}\end{aligned} \tag{14.3.58}$$

となる. また, (14.3.56) から,

$$\begin{aligned}[\delta E]_{2p_{1/2}} &= \frac{\alpha^5 m_e}{6\pi}\left[\ln\left(\frac{\alpha^2 m_e}{2\Delta E_{2p}}\right) - \frac{1}{8}\right] = -5.3267 \times 10^{-8}\ \mathrm{eV} \\ &= 2\pi\hbar\ \times\ -12.88\ \mathrm{MHz}\end{aligned} \tag{14.3.59}$$

を得る.

典型的なラム・シフトは, 水素原子の $2s$ 状態 と $2p_{\frac{1}{2}}$ 状態の間のエネルギー差だ. 輻射補正が無ければこれらの状態は縮退している. 我々の計算によれば,

$$[\delta E]_{2s} - [\delta E]_{2p_{1/2}} = 4.35152 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV} = 2\pi\hbar\ \times\ 1052.19\ \mathrm{MHz}$$

となる. これは, 旧式の摂動論を使って行われたクロール (Kroll) とラム (Lamb) の結果[6]および, フレンチ (French) とワイスコップ (Weisskopf)[7]

の結果に (解析的には同一ではないが) 数値的に近い. この節の最初の方で, $2s$ 状態のエネルギー・シフトへ高エネルギーの寄与のみを考え, 赤外切断を $\alpha^2 m_e = 2$ Ry の大きさと予想して, 1300 MHz と概算した. ここで, これが大きく見積もりすぎていたことがわかる. これは主に, 実際の有効赤外切断定数 $\Delta E_{2s} = 16.64$ Ry が予想より随分大きいということによっている. 一方, 1.3 節で述べたように, 1947 年にハンス・ベーテ[8] は紫外切断を m_e の程度と予想し, $2s$ 状態への低エネルギーの寄与のみを考えて, ラム・シフトについて 1040 MHz という結構よい値を得た. (ベーテは励起エネルギーの概算を $\Delta E_{2s} \simeq 17.8$ Ry と初めて与えた.)

ここで述べたラム・シフトの計算は高次の輻射補正, 核子の拡がり, 反跳効果などを考慮に入れることにより改善されてきた. 現在では, 最も不確実な点は, 陽子の電荷半径 r_p の正しい値についての疑念だ. ある計算[9]によれば, $r_p = 0.862 \times 10^{-13}$ cm ではラム・シフトは 1057.87 MHz, $r_p = 0.805 \times 10^{-13}$ cm では 1057.85 MHz となる. また, 別の計算[10] では, それぞれ, 1057.883 MHz, 1057.865MHz となる. 陽子の半径についての不確実性からみて, これらは現在の実験的測定値[11], 1057.845(9) MHz と非常によく一致しているといえる. この実験値の精度は主に水素の $2p$ 状態の ~ 100 MHz の自然巾から制限されている. したがって, これをそれ以上改善するのは非常に困難だ.

最近になって, $1s$ の基底状態自身の測定は非常に改善された. これは, $1s$–$2s$ 共鳴の振動数と, $2s$–$4s$ と $2s$–$4d$ の 2 光子共鳴の振動数の 4 倍とを比較することで得られた. s と d の状態は $2p$ 状態より非常に狭く, これらの振動数差は典型的なラム・シフトより正確に測定できる. 一時期は, 理論と実験の間に差異があると思われた. 陽子の大きさと他の補正を入れた計算[12,13]によると, 理論的な $1s$ 状態のエネルギー・シフトは上の結果 8127.4 MHz から, 陽子の半径 $r_p = 0.862(11) \times 10^{-13}$ cm では 8173.12(6) MHz, $0.805(11) \times 10^{-13}$ cm では 8172.94(9) MHz

と増大する. 陽子の半径としては $r_p = 0.862(11) \times 10^{-13}$ cm の方がより信頼性が高いと信じられているが, その場合の結果は測定値[13] 8172.86(5) MHz と必ずしも一致していなかった. しかし, この陽子半径を採用し, $\alpha^2(Z\alpha)^5$ の項まで含んだその後の計算[14]では, $1s$, $2s$, $4s$ 状態について実験と一致する値が得られた. したがって, 量子電磁理論はまたもや勝利したと言える.

問題

1. 荷電スカラー粒子が, 質量 $m \neq 0$ を持ち, 場 $\phi(x)$ で表され, 静的な外部電磁場 $\mathcal{A}^\mu(\mathbf{x})$ とのみ相互作用するとする. Φ_N をエネルギーが E_N の規格化された 1 ボソンか 1 反ボソン状態の完全系, Φ_0 を真空として, $u_N(\mathbf{x})e^{-iE_Nt} \equiv (\Phi_0, \phi(\mathbf{x},t)\Phi_N)$ と $v_N(\mathbf{x})e^{iE_Nt} \equiv (\Phi_N, \phi(\mathbf{x},t)\Phi_0)$ と定義する. u_N と v_N が合わせて完全系をなすことを証明し, 一般的な関数 $f(\mathbf{x})$ の展開での u_N と v_N の係数の表式を与えよ.

2. 問題 1 の理論に輻射補正を含めるとする. $i\Pi^*(x,y)$ をこの荷電スカラーの 1 粒子が入り 1 粒子が出て行く次数 α の全てのダイアグラムの和とする. (最後のスカラー・プロパゲーターは除く.) これらの輻射補正による 1 ボソン状態のエネルギー E_N のシフトを $u_N(\mathbf{x})$ と $\Pi^*(x,y)$ を使って表す表式を導け.

3. 14.3 節の結果を使い, 水素原子の $2p$ 状態の輻射崩壊率を計算せよ.

4. 電子が軽いスカラー場 ϕ と $g\phi\bar{\psi}_e\psi_e$ の形の相互作用をするとする. このスカラー場の質量 m_ϕ が $(Z\alpha)^2 m_e \ll m_\phi \ll Z\alpha m_e$ の範囲にあるとする. このとき, 水素原子の $1s$ 状態の, この相互作用によるエネルギーの変化を計算せよ.

5. 問題 4 の計算を $m_\phi = 0$ の場合について行え.

参考文献

1. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A117**, 610 (1928).

2. 例えば, 以下の文献を見よ. A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, 1957); M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, New York, 1957) (ローズ著「角運動量の基礎理論」山内恭彦・森田正人訳, みすず書房).

3. 例えば, 以下の文献を見よ. L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 第 3 版 (McGraw-Hill, New York, 1968), 53 節 (シッフ著「新版 量子力学」井上健訳, 吉岡書店). 原論文は, C. G. Darwin, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A118**, 654 (1928); 同, **A120**, 621 (1928); W. Gordon, *Zeit. f. Phys.* **48**, 11 (1928).

4. G. E. Brown, J. S. Langer, and G. W. Schaefer, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A 251**, 92 (1959); G. E. Brown and D. F. Mayers, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A 251**, 105 (1959); A. M. Desiderio and W. R. Johnson, *Phys. Rev.* **A3**, 1267 (1971).

5. R. W. Huff, *Phys. Rev.* **186**, 1367 (1969).

6. N. M. Kroll and W. E. Lamb, *Phys. Rev.* **75**, 388 (1949).

7. J. B. French and V. F. Weisskopf, *Phys. Rev.* **75**, 1240 (1949).

8. H. A. Bethe, *Phys. Rev.* **72**, 339 (1947).

9. J. R. Sapirstein and D. R. Yennie, *Quantum Electrodynamics*, T. Kinoshita 編 (World Scientific, Singapore, 1990) p. 575, また, そこに含まれた文献を参照.

10. H. Grotch, *Foundations of Physics* **24**, 249 (1994).

11. S. R. Lundeen and F. M. Pipkin, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 232 (1981); S. R. Lundeen and F. M. Pipkin, *Metrologia* **22**, 9 (1986). 概説としては, F. M. Pipkin, *Quantum Electrodynamics*, T. Kinoshita 編 (World Scientific, Singapore, 1990) p. 697 がある.

12. M. Weitz, A. Huber, F. Schmidt-Kaler, D. Leibfried, and T. W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 328 (1994).

13. M. Weitz, F. Schmidt-Kaler, and T. W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1120 (1992) と文献 12.

14. K. Pachucki, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3154 (1994).

訳者あとがき

本シリーズは, Steven Weinberg 氏の "The Quantum Theory of Fields" I, II 巻の日本語訳である.

ここでは, 序文で述べられているように極めて現代的視点から場の理論が扱われている. その視点とは, 現在急速に発展しつつある弦理論とその更に奥にあるかもしれない未知の理論を背景に, 量子力学と特殊相対性理論の基本的要請から場の理論が低エネルギーでそれらの理論の近似理論として必然的に成立するということだ. この観点から, 著者 Weinberg 氏は場の量子論を一歩一歩確実な足取りで組み立て, やがて, 現代的で重要なテーマを論じる. この意味で, 同じ時期に出た他の場の量子論の本と比べても, この本は非常にユニークなものとなっており, 今後の場の量子論の教科書のスタンダードと成りうるものだ.

原著 I 巻は, 日本語訳では, 1, 2 巻に分冊されている. 1 巻では, 場の理論自身の構成が詳細に議論され, その後に実際の物理的過程を計算するためのファインマン則が述べられた. この 2 巻では, 場の理論形式が正準理論, 経路積分と述べられ, くりこみの理論とその物理的効果が赤外発散の問題とともに順序立てて展開される. 読者は, 是非この 1,2 巻を通して学び, 場の理論の基本的概念を習得されたい. さらに, 原著 II 巻では, 数多くのより現代的なトピックについて著者独特の丁寧な議論がなされている. これは日本語訳 3,4 巻として刊行予定である.

この本を作るにあたって, 著者 S. Weinberg 氏には幾つかの疑問点について御教示を戴いた. また, Campridge University Press の A. Woollat 氏には原著第 2 刷の LaTeX 原稿を送って戴いた. ここに

感謝の意を表したい.

また, 本書の出版に際し, 吉岡書店の上川正二氏に大変お世話になった. ここに記して感謝する.

1997 年 7 月 訳者

索引

人名

イタリック体のページ番号は「関連書誌」と
「参考文献」に引用した文献を示す.

日本語事項

英語事項

ISBN 4-8427-0000-9

訳者略歴

青山　秀明（あおやま　ひであき）

1976年：京都大学理学部物理学科卒

1982年：カリフォルニア工科大学博士課程修了．Ph.D

1982―1988年：スタンフォード線形加速器センター理論部研究員，ハーバード大学客員研究員等

1988年：京都大学理学部助手

現在：京都大学総合人間学部基礎科学科助教授
訳書に「物理学演習モスクワの森」（コゼル他編，吉岡書店），「場の理論―統計論的アプローチ」（パリージ著，吉岡書店），「経路積分法」（スワンソン著，吉岡書店）

有末　宏明（ありすえ　ひろあき）

1976年：京都大学理学部物理学科卒

1982年：京都大学理学博士

1982―1983年：日本学術振興会奨励研究員

1983―1985年：京都大学基礎物理学研究所研究員

1985―現在：大阪府立工業高等専門学校助教授

物理学叢書

＊編　集＊

小　林　　稔
（京都大学名誉教授）

井　上　　健
（京都大学名誉教授）

山　本　常　信
（京都大学名誉教授）

高　木　修　二
（大阪大学名誉教授）

S. Weinberg：場の量子論（２巻）　量子場の理論形式　1997 ©

1997年9月20日　第1刷発行

訳　者　青　山　秀　明
　　　　有　末　宏　明

発行者　吉　岡　　誠

〒606 京都市左京区田中門前町87

株式会社　吉　岡　書　店

電話(075)781-4747/振替　01030-8-4624

印刷・製本㈱太洋社

ISBN 4-8427-0265-6

「物理学叢書」刊行に際して

二十世紀の物理学の進歩は，物質の極微の構造の暴露に，物質の精妙な機構の解明に，驚異的な発展，飛躍をもたらした．その結果，新しい自然力の解放，支配を実現化したばかりでなく，新しい物質の創造，生命の謎への挑戦をも企画せしめつつある．更に，既知の自然力の未曾有の強力な駆使さえ可能にしつつある．二十世紀後半に至って，原子力に，あるいはオートメーションに今や第二の産業革命を喚起せんとするに至った原動力は，物理学の開拓的な創造性によることは言をまたない．更に，現在の物理学は，かつての相対論，量子論の出現にも比すべき革命の前夜にあるといわれているこの時に当たり，物理学の新領域の単なる解説，あるいは時局的な技術書ではなく，真にわが国物理学の発展の糧となるべき良書の出版は緊急の必要事といわねばならぬ．ここに「物理学叢書」を編んで世に送る所以である．

この叢書に収められる原著は，いずれもそれぞれの分野の世界的権威者による定評ある名著に限られるが，前述の精神に鑑みその性格，スタイルに特徴あるものを選ぶと共に，その本質において創造的価値高きものを目標とした．

この叢書が，物理学またはその関連分野へ進む学徒に，よき伴侶として用いられ，真にその血肉となり得ることがわれわれの念願であり，更にこの叢書によって伝えられる海外の学風が，広くわが国の教育，研究へのよき刺戟となり，わが国の明日の科学を築く基礎に貢献するところがあれば幸いである．

(1954年12月)

物　理　学　叢　書

編集・小谷正雄／小林　稔／井上　健／山本常信／高木修二

著者・訳者	書名	頁数	内容
フェルミ　小林　稔他訳	原子核物理学		本書は著者の講義に補正を加えられたものであり，実験・理論両方面にわたって原子核の基礎知識の全ぼうが要領よくまとめられている．内容の新鮮さ力強さに著者の個性が表われている．
シッフ　井上　健訳	新版 量子力学 上・下	上 368頁　下 320頁	刊行以来無比の標準的教科書として絶賛を博してきた本書は，原著第3版刊行にともない全面的に版を改めた．基本的な概念やその数学的形式を丁寧に解説されている量子力学の入門書である．
ゴールドスタイン　瀬川富士他訳	新版 古典力学 上・下	上 528頁　下416頁	最近，物性物理や素粒子物理を学ぶ人の間に，古典力学はきちんと学ぶべきだという気持が強い．本書は，場の理論から，多体系の物理学を研究する上で，基本的な入門書であり，古典力学を新しい見地から解説．
リープマン，ロシュコ　玉田　珖訳	気体力学		高速流体力学の基礎をできるだけ物理的に記述し，流体運動と流体の物性との結びつきの理解へと読者を導き，反応性気流や稀薄気体の流れなど最近の問題にも適応するすぐれた教科書である．
フレーリッヒ　永宮健夫・中井祥夫訳	誘電体論		誘電率の意味を熱力学的，統計力学的にとらえ，個々の分子の双極子能率と誘電率より固体，気体，溶液などの誘電的性質を統一的観点から記述され，本質を簡潔，かつ完璧にまとめられている．

頁数記載なきは品切もしくは未刊